2.1 FUERZAS CONSERVATIVAS Y NO CONSERVATIVAS

Hemos visto que el trabajo L realizado por una fuerza resultante que actúa sobre una partícula es igual a la variación de energía cinética ΔEc de la partícula:

$$L = \Delta Ec$$

Para el caso de una partícula la fuerza resultante es la suma de varias fuerzas F_i aplicadas sobre la partícula, $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_i + ...$. En mecánica clásica resulta útil considerar estas fuerzas divididas en dos tipos: **conservativas** y **no conservativas** o **disipativas**. A su vez los trabajos L_i podrán, de la misma manera, ser clasificados como provenientes de fuerzas de uno u otro tipo. Podemos entonces reescribir la ecuación anterior

$$L_c + L_{nc} = \Delta Ec$$

Siendo L_c el trabajo de las fuerzas conservativas y L_{nc} el trabajo de las fuerzas no conservativas.

A medida que avancemos, veremos la utilidad de esta distinción. Veamos ahora un ejemplo.

Ejemplo 2.1:

Consideremos una partícula de masa m, cerca de la superficie de la Tierra, queremos calcular el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria a lo largo de la trayectoria, indicada en la figura, que une los puntos A y B.

El trabajo, que designaremos L_{AB} será:

$$L_{AB} = \underbrace{mg\,(x_B - x_A)\cos 90°}_{\text{trayecto horizontal}} + \underbrace{mg\,(y_B - y_A)\cos 180°}_{\text{trayecto vertical}}$$

Como cos 90° = 0, la fuerza no realiza trabajo en el trayecto horizontal, de donde

$$L_{AB} = -\,mg\,(y_B - y_A)$$

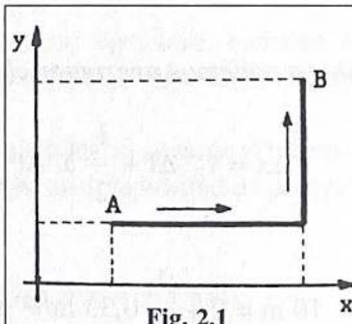


Fig. 2.1

Este es un resultado muy peculiar, ya que el trabajo en este caso depende de las ordenadas de los puntos final e inicial.

Veamos si este resultado es general; consideremos para ello una trayectoria cualquiera que pensamos compuesta de pequeñas trayectorias alternadamente horizontales y verticales como se indica en la ampliación de la **Fig. 2.2**.

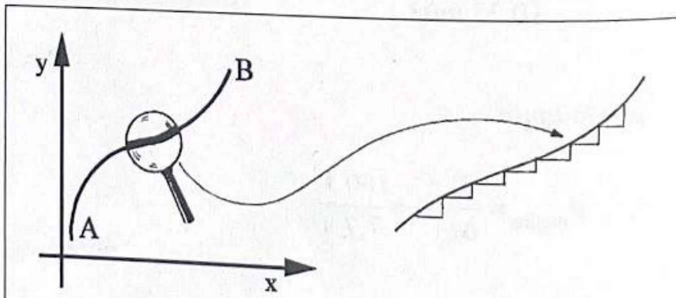


Fig. 2.2

Para ellas ya sabemos calcular el trabajo. De esta manera el trabajo total será la suma de las diferentes contribuciones

$$L_{AB} = L_{A1} + L_{12} + \ldots + L_{nB} =$$
$$= - mg\,(y_1 - y_A) - mg\,(y_2 - y_1) - \ldots - mg\,(y_B - y_n)$$

donde los subíndices representan los diversos triángulos en que hemos dividido la trayectoria. Se puede comprobar fácilmente (trate de hacerlo) que las contribuciones horizontales son nulas y las verticales suman el valor $(y_B - y_A)$, y así:

$$L_{AB} = - mg\,(y_B - y_A)$$

En el límite de escalones cuyo tamaño tiende a cero nuestra trayectoria coincidirá con la elegida inicialmente, que es arbitraria. Concluímos entonces que para la fuerza gravitatoria el trabajo realizado entre dos puntos A y B es independiente de la trayectoria elegida y es sólo función de los puntos inicial y final. En particular para una trayectoria cerrada

$$L_{\text{trayectoria cerrada}} = 0$$

Esta propiedad que tiene la fuerza gravitatoria, se extiende como definición general de fuerzas conservativas, como sigue:

Una fuerza es **conservativa** cuando el trabajo realizado por ella a lo largo de una trayectoria cerrada es **cero**. Asimismo diremos que una fuerza es **no conservativa** si el trabajo a lo largo de una trayectoria cerrada es **distinto de cero.**

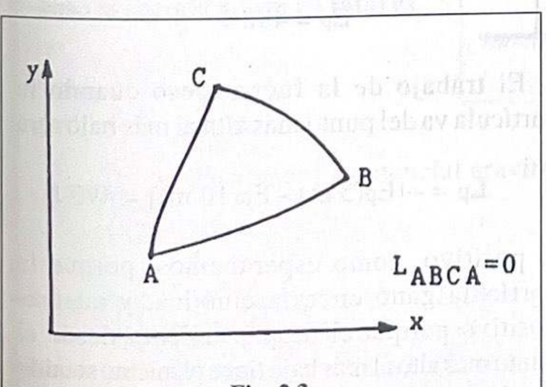


Fig. 2.3

Consideremos ahora el caso de un resorte deformado por una fuerza aplicada. El trabajo realizado por la fuerza elástica en la deformación (compresión o estiramiento) es:.

$$L_{Fe} = \frac{1}{2} K\,[\Delta x_2^2 - \Delta x_1^2] = \frac{1}{2} K\,[(x_2 - l_o)^2 - (x_1 - l_o)^2]$$

donde x_2 es la posición final y x_1 es la posición inicial del extremo libre del resorte y l_o es la longitud del resorte relajado. Si en particular en l_o se elige el origen de coordenadas $l_o = 0$, la expresión que permite calcular el trabajo de la fuerza elástica será:

$$L_{Fe} = \frac{1}{2} K\,(x_2^2 - x_1^2)$$

Esta expresión depende sólo de la coordenada x, se puede demostrar que para una trayectoria cerrada el trabajo de la fuerza elástica es cero. De acuerdo con la definición dada para fuerzas conservativas, la fuerza elástica es una fuerza conservativa.

Sea ahora el sistema de la figura, donde tenemos un bloque con una velocidad $\vec{v}_0$ cuando el resorte está en su posición de equilibrio.

Para la trayectoria cerrada, correspondiente al movimiento alternativo, el trabajo de la fuerza elástica es L=0 y por lo tanto $\Delta Ec = 0$ al cabo de una oscilación completa. Esto significa que cada vez que el bloque pasa por la posición x = 0 de equilibrio, posee la misma Ec, o sea, posee la misma velocidad.

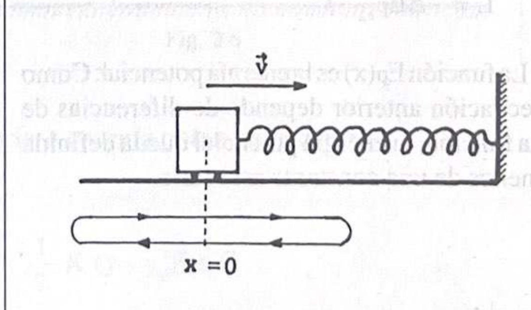


Fig. 2.4

¿Qué sucedería si hubiera rozamiento entre las superficies del bloque y del plano?

Como sabemos, la fuerza de rozamiento es, en este caso, opuesta al movimiento del cuerpo. En tal circunstancia el bloque volverá a su posición inicial con una energía cinética menor que la de partida ($\Delta Ec \neq 0$). Esto quiere decir que el trabajo de la fuerza de rozamiento en una trayectoria cerrada no es cero y por lo tanto es una fuerza **no conservativa**.

Una fuerza **conservativa** como la del resorte realiza trabajo positivo en una parte del recorrido y negativo en otra de modo tal que ambas contribuciones se compensan al considerar la trayectoria completa. De la misma manera el trabajo realizado por la fuerza de gravedad a lo largo de una trayectoria en la que se sube tanto como se baja, es cero. El trabajo de las fuerzas de rozamiento tiene el mismo signo y no puede compensarse.

2.2 ENERGIA POTENCIAL

Las fuerzas conservativas tienen la propiedad de no realizar trabajo a lo largo de una trayectoria cerrada. Matemáticamente esto es equivalente a que el trabajo realizado entre dos puntos cualesquiera 1 y 2 es igual a la diferencia de una función que depende sólo de las coordenadas de esos puntos. Escribiremos esto así:

$$L = - [Ep(x_2) - Ep(x_1)]$$

$$L = - \Delta Ep_{12}$$

La función $Ep(x)$ es la energía potencial. Como la ecuación anterior depende de diferencias de esta función, la energía potencial queda definida a menos de una constante arbitraria.

2.2.1 ENERGIA POTENCIAL GRAVITATORIA

Por lo visto en **2.1** la energía potencial gravitatoria de una partícula ubicada a una altura h sobre la superficie de la Tierra será

$$Ep(h) = m\,g\,h + C$$

donde C es la constante arbitraria que mencionamos anteriormente. Por convención podemos asignar Ep= 0 cuando la partícula está sobre la superficie, en ese caso:

$Ep(h = 0) = C = 0$ (hay otras convenciones posibles).

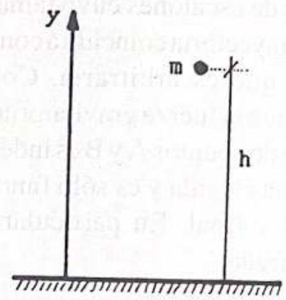


Fig. 2.5

Por ejemplo un cuerpo de masa 10 kg a una altura de 10 m sobre la superficie de la Tierra tendrá una energía potencial

$$Ep = 10\ kg\ .\ 9{,}8\ m/s^2\ .\ 10\ m =$$
$$= 980\ N\ m = 980\ J$$

La misma partícula a 5 m sobre la superficie de la Tierra tendrá

$$Ep = 490\ J$$

El trabajo de la fuerza peso cuando la partícula va del punto más alto al más bajo será

$$Lp = - [Ep(5\ m) - Ep(10\ m)] = 490\ J$$

positivo, como esperábamos, porque la partícula ganó energía cinética, y además positivo porque el desplazamiento desde el punto más alto al más bajo tiene el mismo sentido que la fuerza peso.

2.2.2 ENERGIA POTENCIAL ELASTICA

Para el caso de una fuerza elástica lineal, tendremos

$$Ep(x) = \frac{1}{2} K \Delta x^2 + C = \frac{1}{2} K (x - l_0)^2 + C$$

Si convenimos en asignar Ep = 0 a la posición de resorte relajado ($\Delta x = 0 \Rightarrow x = l_0$), podemos ver que C = 0.

Como ejemplo calculemos cuál sería la energía necesaria para comprimir un centímetro a un resorte de K = 2 N/cm.

$$Ep(x) = \frac{1}{2}\ 2 \frac{N}{cm} (1\ cm)^2 = 0{,}01\ N\ m = 0{,}01\ J$$

Ejemplo 2.2:

Consideremos ahora un resorte de masa despreciable y del cual suspendemos un cuerpo de masa m. Sea y_0 la coordenada del extremo del resorte libre respecto de la superficie de la Tierra. Queremos encontrar la energía potencial de este sistema:

Como las posiciones para las cuales Ep gravitatoria y Ep elástica se anulan de acuerdo a nuestra convención anterior son diferentes, es necesario elegir una posición de referencia común, dado que en este caso la energía potencial **total** es

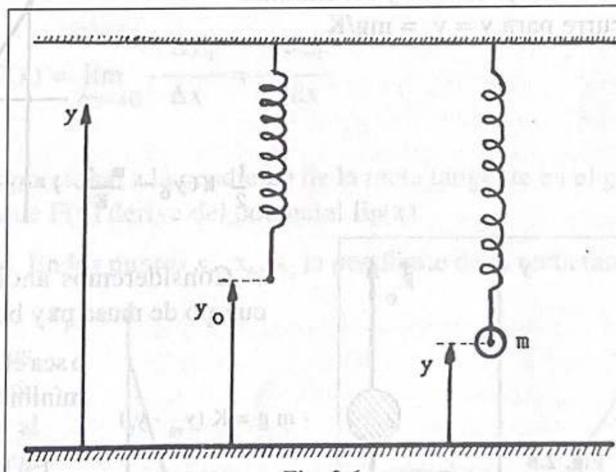


Fig. 2.6

Ep = energía potencial gravitatoria + energía potencial elástica

$$Ep = m\ g\ y + \frac{1}{2} K (y - y_0)^2 + C$$

Ejemplo 2.2:

Si elegimos arbitrariamente Ep(y =0) = 0 resulta,

$$0 = m\,g\,.\,0 + \frac{1}{2} K\,(-y_0)^2 + C\ ,\ \text{luego}\ \ C = -\frac{1}{2} K\,y_o^{\,2}$$

Entonces:

$$Ep = m\,g\,y + \frac{1}{2} K\,(y - y_0)^2 - \frac{1}{2} K\,y_0^2$$

que se puede reescribir de la siguiente manera

$$Ep = \frac{1}{2} K\,(y^2 - 2\,y\,y_0 + 2\,\frac{m\,g}{K}\,y + \cancel{y_0^2} - \cancel{y_0^2})$$

$$Ep = \frac{1}{2} K\,[y^2 - 2\,y\,(y_0 - \frac{m\,g}{K}) + (y_0 - \frac{m\,g}{K})^2 - (y_0 - \frac{m\,g}{K})^2]$$

$$Ep = \frac{1}{2} K\,[y - (y_0 - \frac{m\,g}{K})]^2 - \frac{1}{2} K\,(y_0 - \frac{m\,g}{K})^2$$

Es instructivo graficar Ep en función de y, que corresponde a una parábola.

Vemos que existe un mínimo de la energía potencial y ese mínimo ocurre para $y = y_0 = mg/K$.

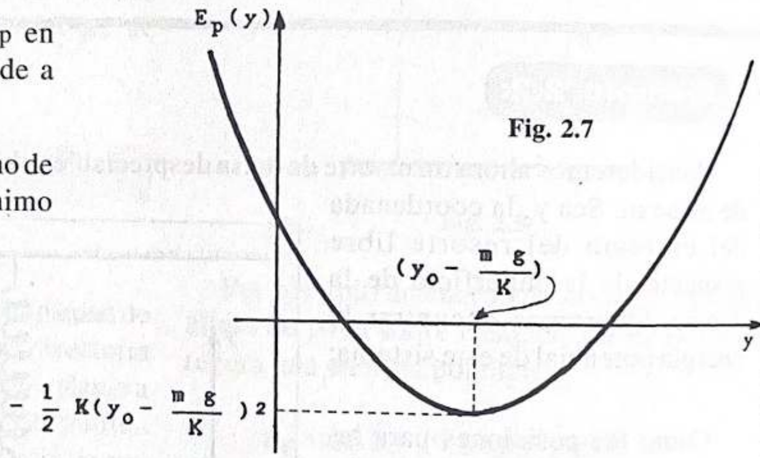


Fig. 2.7

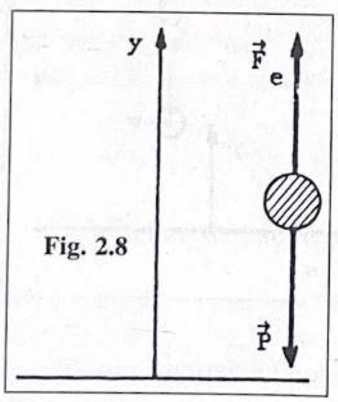


Fig. 2.8

Consideremos ahora las fuerzas que actúan sobre el cuerpo de masa m y busquemos la posición de equilibrio.

$$-\,m\,g = K\,(y_{eq} - y_0)$$

$$y_{eq} = y_0\,\frac{m\,g}{K}$$

o sea el mismo valor que encontramos para el mínimo de Ep.

En **suposición de equilibrio** (estable) este sistema **minimiza su energía potencial.**

Este es un resultado de validez general: las posiciones de equilibrio corresponden a mínimos, máximos o puntos de estacionamiento del potencial, cualquiera sea éste. La demostración escapa a los objetivos de este curso. Sin embargo haremos una discusión más detallada para un potencial en una dimensión.

2.2.3 ENERGIA POTENCIAL Y FUERZAS

Consideremos un sistema cuya energía potencial Ep(x) es una función cualquiera de x, en particular podría ser la de la **Fig. 2.9**

Vimos anteriormente que $\Delta L = -\Delta Ep$. Si pensamos en el trabajo realizado entre los puntos x_1, x_2 podemos definir una **fuerza media** de manera que:

$$F_{m(1,2)}\ (x_2 - x_1) = Ep(x_1) - Ep(x_2)$$

$$F_{m(1,2)} = \frac{Ep(x_1) - Ep(x_2)}{x_2 - x_1} = \frac{-\Delta Ep}{\Delta x}$$

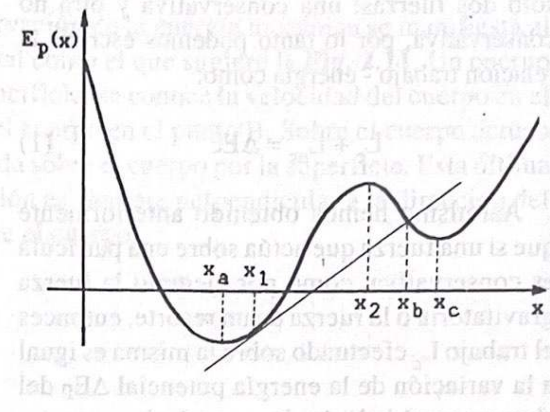


Fig. 2.9

que queda representada por la pendiente de la recta secante en los puntos x_1 y x_2 cambiada de signo.

Recordemos lo hecho en cinemática al definir velocidad y aceleración media. Con métodos análogos a los que nos permitieron definir velocidad y aceleración instantáneas, podemos obtener la fuerza F(x) - punto a punto - cuyo trabajo a lo largo de x es la variación de energía potencial (con signo menos) del sistema:

$$F(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Ep}{\Delta x} = \frac{dEp}{dx}$$

de donde puede verse que F(x) es proporcional a la pendiente de la recta tangente en el gráfico Ep en función de x. Es común decir que F(x) deriva del potencial Ep(x).

Analicemos el caso de la **Fig. 2.10**. En los puntos x_0, x_b, x_c la pendiente de la recta tangente es cero entonces $F = 0$.

En x_0, x_c la energía tiene mínimos locales, si nos apartamos un poco de esta posición la fuerza, por su sentido tiende a volver al sistema al punto de equilibrio. Decimos que estamos en **equilibrio estable**. Por el contrario, si nos alejamos de x_b, ya sea para uno u otro lado, las fuerzas tenderán a alejar al sistema de x_b; decimos entonces que estamos en **equilibrio inestable**. Puede haber puntos en los que la pendiente es cero y sin embargo no hay mínimos ni máximos, esos son los puntos de estacionamiento (el gráfico presenta carencia de ellos).

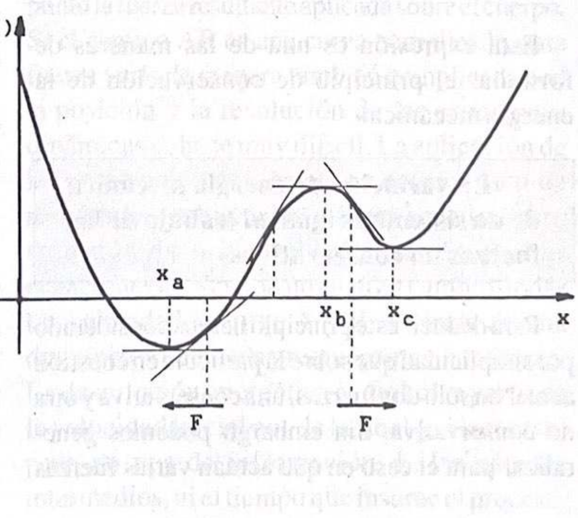


Fig. 2.10

2.3 ENERGIA MECANICA

Hemos visto una forma de clasificar las fuerzas en conservativas y no conservativas. Consideremos para simplificar que sobre una partícula actúan sólo dos fuerzas: una conservativa y otra no conservativa, por lo tanto podemos escribir la relación trabajo - energía como:

$$L_c + L_{nc} = \Delta Ec \qquad (1)$$

Asimismo hemos obtenido anteriormente que si una fuerza que actúa sobre una partícula es conservativa, como por ejemplo la fuerza gravitatoria o la fuerza de un resorte, entonces el trabajo L_c efectuado sobre la misma es igual a la variación de la energía potencial ΔEp del sistema cambiada de signo, es decir

$$L_c = - \Delta Ep$$

y por lo tanto, reemplazando en la expresión (1) obtenemos que

$$\Delta Ec + \Delta Ep = L_{nc}$$

Si definimos a la energía mecánica Em de un sistema como la suma de la energía cinética y de la energía potencial del mismo,

$$Em = Ec + Ep$$

resulta que

$$\Delta Em = L_{nc} \qquad (2)$$

Esta expresión es una de las maneras de formular el principio de conservación de la energía mecánica:

> **«La variación de energía mecánica de un sistema es igual al trabajo de las fuerzas no conservativas»**

Para deducir este principio hemos considerado por simplicidad que sobre la partícula en cuestión actuaban sólo dos fuerzas, una conservativa y otra no conservativa. Sin embargo podemos generalizar para el caso en que actúan varias fuerzas conservativas y no conservativas. Entonces la expresión (1) adopta la forma:

$$L_{c1} + L_{c2} + \ldots + L_{nc1} + L_{nc2} + \ldots = \Delta Ec$$

o bien

$$\Sigma L_{ci} + \Sigma L_{nci} = \Delta Ec \qquad (3)$$

en donde el símbolo Σ indica la suma de los trabajos realizados por las diversas fuerzas. Ahora bien, cada una de las fuerzas conservativas, como la gravedad, la fuerza elástica, la fuerza electrostática, etc., realizan trabajos que son iguales a las variaciones de energías potenciales correspondientes cambiadas de signos, o sea:

$$L_{ci} = - \Delta Ep_i$$

$$\Sigma L_{ci} = - \Sigma \Delta Ep_i$$

entonces, reemplazando en (2)

$$\Delta Ec + \Sigma \Delta Ep_i = \Sigma L_{nci}$$

El primer miembro de la expresión anterior es la variación de energía mecánica total cuando sobre una partícula actúan varias fuerzas conservativas. Entonces como

$$Em = Ec + \Sigma Ep_i$$

nos queda

$$\Delta Em = \Sigma L_{nci} \qquad (4)$$

Esta expresión es una forma más general del principio de la conservación de la energía. En particular, si sobre una partícula actúan sólo fuerzas conservativas, entonces su trabajo es cero, de modo que de las ecuaciones (2) o (4) resulta que

$$\Delta Em = 0$$

Esto significa que cualquiera sea el sistema de fuerzas conservativas actuante sobre la partícula su movimiento tiene lugar de tal manera que su energía mecánica total se mantiene constante. En muchas circunstancias esta propiedad nos permite conocer posiciones y velocidades de un sistema con sólo saber su velocidad inicial y sin resolver en detalle las ecuaciones de Newton.

2.4 APLICACIONES

Ilustraremos con diversos ejemplos el principio de conservación de la energía formulado previamente.

La verdadera utilidad del principio de conservación de la energía mecánica se manifiesta al intentar la resolución de problemas dinámicos tal como el que sugiere la **Fig. 2.11**. Un cuerpo de masa m se desliza sin rozamiento sobre la superficie; se conoce la velocidad del cuerpo en el punto A y se quiere sabe cuál es la velocidad del cuerpo en el punto B. Sobre el cuerpo actúan dos fuerzas, el peso y la fuerza de vínculo ejercida sobre el cuerpo por la superficie. Esta última es una fuerza de intensidad variable y su dirección es siempre perpendicular a la dirección del movimiento por lo tanto no realiza trabajo sobre el cuerpo.

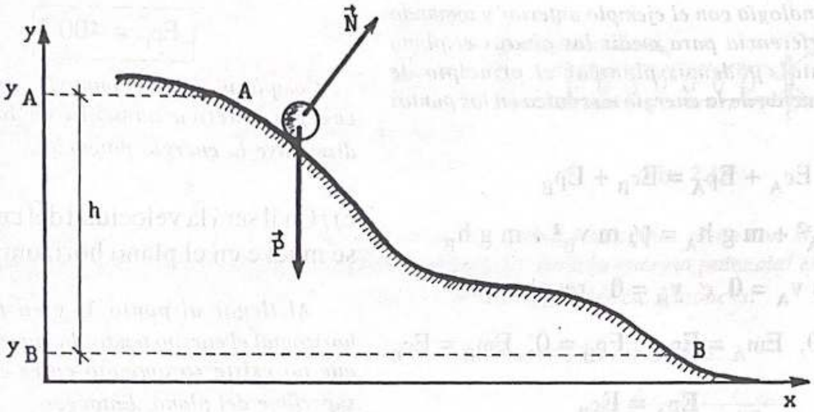


Fig. 2.13

El peso del cuerpo es una fuerza conservativa de modo que la energía mecánica se conserva, entonces tendremos

$$Em_A = Em_B$$

$$Ec_A + Ep_A = Ec_B + Ep_B$$

$$\frac{1}{2} m\, v_A^2 + m\, g\, y_A = \frac{1}{2} m\, v_B^2 + m\, g\, y_B$$

donde v_A, y_A, v_B e y_B son las velocidades y las alturas del cuerpo en las posiciones A y B respectivamente.

Por lo tanto

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + 2\, g\, (y_A - y_B)}$$

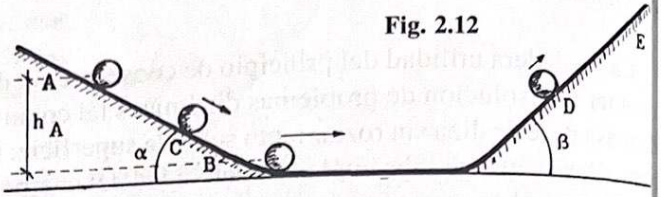
$$v_B = \sqrt{v_A^2 + 2\, g\, h}$$

Observe que la ecuación anterior es independiente de la forma de la trayectoria AB y del tiempo que dure el desplazamiento. Si deseáramos resolver el problema aplicando las leyes de Newton necesitaríamos conocer punto a punto la fuerza resultante aplicada sobre el cuerpo. Si el camino AB es una curva complicada, esta fuerza varía de manera también complicada con la posición y la resolución de las ecuaciones dinámicas se hace muy difícil. La aplicación de la conservación de la energía mecánica permite resolver el problema de manera sencilla, pero sólo nos da la velocidad final en B. Las ecuaciones de Newton nos dan en cambio, todas las velocidades **entre** A y B. Se trata de una descripción detallada y requiere mayor esfuerzo. La descripción energética es**global**: a partir de la velocidad inicial nos da la final (o viceversa) pero no nos da información de los estados intermedios, ni el tiempo que insume el proceso.

Ejemplo 2.3:

Resolvamos ahora el siguiente problema: un cuerpo de masa 10 kg se deja caer desde un punto A, situado a 6 m de altura, por un plano inclinado de 30°. Luego se desplaza por un plano horizontal hasta que sube por otro plano inclinado de 45°. Despreciemos el rozamiento. Calular: **a)**, **b)**, **c)** **d)**.

Fig. 2.12



a) ¿Cuál será la energía cinética del cuerpo en el punto B?

En analogía con el ejemplo anterior y tomando como referencia para medir las alturas el plano horizontal, podemos plantear el principio de conservación de la energía mecánica en los puntos A y B.

$$Ec_A + Ep_A = Ec_B + Ep_B$$

$$\tfrac{1}{2}\, m\, v_A^2 + m\, g\, h_A = \tfrac{1}{2}\, m\, v_B^2 + m\, g\, h_B$$

y como $\mathbf{v_A = 0}$ e $\mathbf{y_B = 0}$ resulta que

$$Ec_A = 0,\ Em_A = Ep_A\ ;\ Ep_B = 0,\ Em_B = Ec_B$$

$$\mathbf{Ep_A = Ec_B}$$

es decir que en el punto A el cuerpo sólo tiene energía potencial mientras que en el punto B sólo tiene energía cinética. Podemos afirmar entonces que toda la energía potencial del cuerpo en A se transforma en energía cinética en B. Resolviendo numéricamente obtenemos

$$Ep_A = m\, g\, h_A$$

reemplazando: $Ep_A = 10\ kg\ .\ 10\ m/s^2\ .\ 6\ m$

$$\boxed{Ep_A = 600\ J} \Rightarrow \boxed{Ec_B = 600\ J}$$

b) ¿Cuáles serán la energía mecánica, potencial y cinética del cuerpo en el punto C situado a 2 m de altura?

La energía mecánica se conserva, por lo tanto

$$Em_C = Em_A = 600\ J$$

La energía potencial en C es

$$Ep_C = m\, g\, h_C\ ;\ Ep_C = 10\ kg\ .\ 10\ m/s^2\ .\ 2\ m$$

$$\boxed{Ep_C = 200\ J}$$

y la energía cinética en C es

$$Ec_C = Em_C - Ep_C\ ;\ Ec_C = 600\ J - 200\ J$$

$$\boxed{Ec_C = 400\ J}$$

Comparando con el punto A vemos que en C la energía cinética aumenta en la medida que disminuye la energía potencial.

c) ¿Cuál será la velocidad del cuerpo cuando se mueve en el plano horizontal?

Al llegar al punto B y en todo el plano horizontal el cuerpo tendrá la misma velocidad ya que no existe rozamiento entre el cuerpo y la superficie del plano. Entonces.

$$v_B = \sqrt{2\, g\, h_A}\ ;\ v_B = \sqrt{2\ .\ 10\ m/s^2\ .\ 6\ m}$$

$$\boxed{v_B = 10{,}95\ m/s}$$

d) ¿A qué altura del segundo plano inclinado se detendrá?

Sin necesidad de hacer cálculos, podemos anticipar que el cuerpo llegará a la misma altura que aquélla desde la que fue soltado.

Por conservación de energía mecánica en el punto D ($y_D = 0$) *el cuerpo tiene*

$$Em_D = Ec_D = 600\ J$$

y en el punto E donde se detendrá $v_E = 0$ *entonces*

$$Em_E = Ep_E = m\, g\, h_E$$

$$h_E = \frac{600\ J}{10\ kg\ .\ 10\ m/s^2}$$

$$\boxed{h_E = 6\ m}$$

Ejemplo 2.4:

A un resorte lineal cuya constante elástica K es 5 N/cm se lo comprime 3 cm a partir de su longitud relajada. Se le apoya una pelotita de 0,2 kg. Si suponemos que el resorte está horizontal y no hay rozamiento entre la pelotita y la superficie de apoyo, ¿cuál será la velocidad que adquiere la pelotita si se descomprime el resorte, cuando pasa por la posición de equilibrio del resorte?

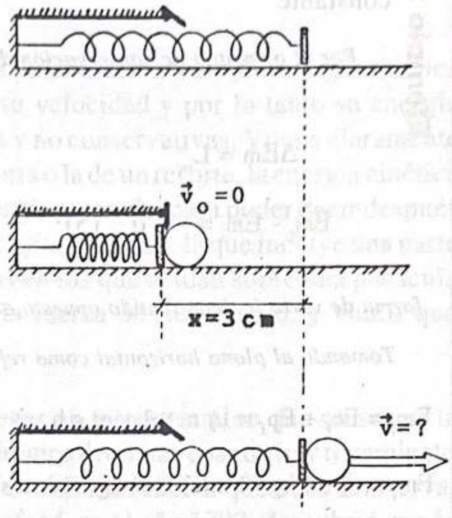


Fig. 2.13

Sabemos que la fuerza elástica es conservativa y por lo tanto la energía mecánica se conserva durante el proceso de descompresión del resorte. La energía mecánica inicial es igual a la energía potencial del resorte 1/2 K x^2 y la energía mecánica final es igual a la energía cinética de la pelotita 1/2 m v^2. Como se nos pide la velocidad de la pelota en la posición de equilibrio del resorte, observemos que mientras éste se halla comprimido ejerce una fuerza sobre la pelota, incrementando así su energía cinética.

Al llegar a la posición de equilibrio, la fuerza elástica se anula y la pelota sigue con MRU con la velocidad que tiene en ese instante, desvinculándose del resorte. Toda la energía potencial elástica del resorte se ha transferido en este proceso a la pelota como energía cinética. Entonces,

$Ep_e = Ec \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\, K\, x^2 = \frac{1}{2}\, m\, v^2$ *sustituyendo unidades:*

despejando la velocidad: $v = \sqrt{(K/m)}\; x$

$$v = \sqrt{\frac{5 \text{ kg m/s}^2}{0{,}2 \text{ kg} \;\; 0{,}01 \text{ m}}} \; . \; 0{,}03 \text{ m}$$

reemplazando: $v = \sqrt{\frac{5 \text{ N/cm}}{0{,}2 \text{ kg}}} \; . \; 3 \text{ cm}$

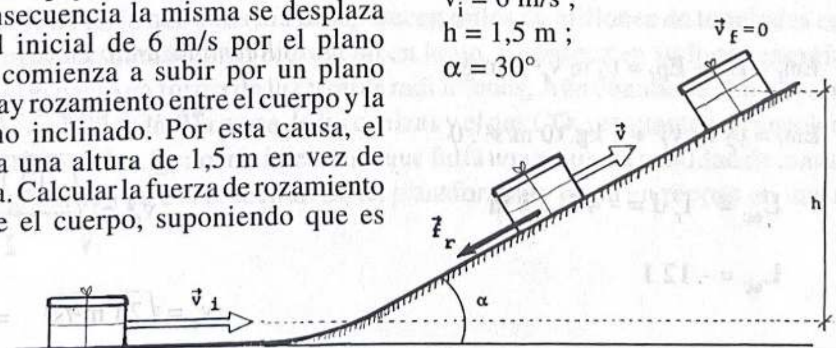
$$\boxed{v = 1{,}5 \text{ m/s}}$$

Consideremos ahora el siguiente problema que involucra **fuerzas no conservativas.**

Ejemplo 2.5:

Un hombre da un empujón a una caja cuya masa es de 4 kg. Como consecuencia la misma se desplaza con una velocidad inicial de 6 m/s por el plano horizontal. Luego comienza a subir por un plano inclinado de 30°. Hay rozamiento entre el cuerpo y la superficie del plano inclinado. Por esta causa, el cuerpo se detiene a una altura de 1,5 m en vez de detenerse más arriba. Calcular la fuerza de rozamiento $\vec{f}_r$, que actúa sobre el cuerpo, suponiendo que es constante.

$v_i = 6$ m/s ;
h = 1,5 m ;
$\alpha = 30°$



Ejemplo 2.5:

a) Calcular la fuerza de rozamiento $\vec{f}_r$ que actúa sobre el cuerpo, suponiendo que es constante

Por el principio de conservación de la energía tenemos que,

$$\Delta Em = L_{nc}$$

$$Em_f - Em_i = - f_r\, d \qquad (5)$$

donde Em_f *y* Em_i *son las energías mecánicas final e inicial respectivamente, d es el desplazamiento del cuerpo sobre el plano inclinado y el signo menos del segundo miembro se debe a que al calcular el trabajo de la fuerza de rozamiento la dirección de ésta es de 180° respecto de la dirección del desplazamiento* (cos 180° = -1)*, o si se prefiere esta otra forma de verlo fr tiene sentido opuesto al desplazamiento.*

Tomando al plano horizontal como referencia para la energía potencial gravitatoria, tenemos que,

$Em_f = Ec_f + Ep_f = ½\, m\, v_f^2 + m\, g\, h$

$Em_f = ½ \,.\, 4\text{ kg } (0\text{ m/s})^2 + 4\text{ kg} \,.\, 10\text{ m/s}^2 \,.\, 1{,}5\text{ m}$

$Em_f = 60\text{ J}$

$Em_i = Ec_i + Ep_i = ½\, m\, v_i^2 + m\, g\, h$

$Em_i = ½ \,.\, 4\text{ kg } (6\text{ m/s})^2 + 4\text{ kg} \,.\, 10\text{ m/s}^2 \,.\, 0\text{ m}$

$Em_i = 72\text{ J}$

$$d = \frac{h}{\text{sen } 30°} \qquad d = \frac{1{,}5\text{ m}}{0{,}5} \qquad d = 3\text{ m}$$

Reemplazando en (5) $\quad 60\text{ J} - 72\text{ J} = - f_r \,.\, 3\text{ m}$

$$\boxed{f_r = 4\text{ N}}$$

b) ¿Cuál será la velocidad del cuerpo al pie del plano inclinado, cuando retorne? (Si es que retorna)

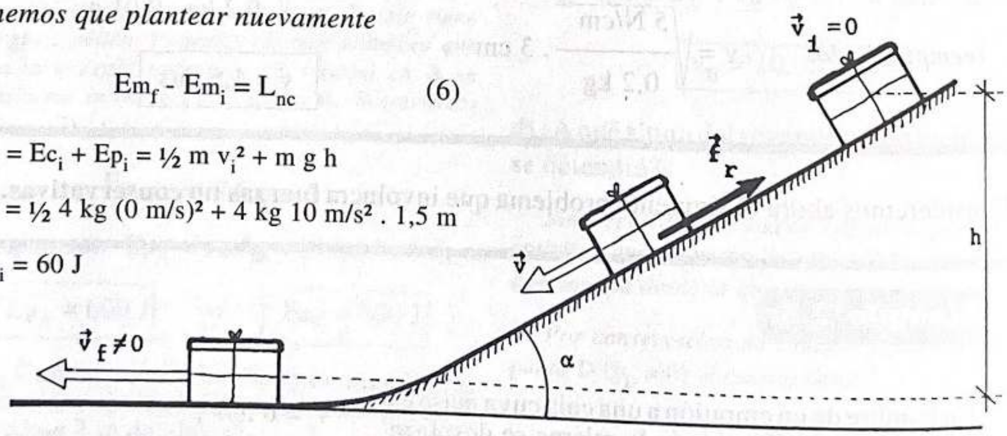
Tenemos que plantear nuevamente

$$Em_f - Em_i = L_{nc} \qquad (6)$$

$Em_i = Ec_i + Ep_i = ½\, m\, v_i^2 + m\, g\, h$

$Em_i = ½\ 4\text{ kg } (0\text{ m/s})^2 + 4\text{ kg } 10\text{ m/s}^2 \,.\, 1{,}5\text{ m}$

$Em_i = 60\text{ J}$



$Em_f = E_{cf} + Ep_f = ½\, m\, v_f^2 + m\, g\, h$

$Em_f = ½\text{ kg } v_f^2 + 4\text{ kg } 10\text{ m/s}^2 \,.\, 0$

$L_{nc} = - f_r\, d = - 4\text{ N} \,.\, 3\text{ m}$

$L_{nc} = - 12\text{ J}$

Reemplazando en (6)

$\text{kg } v_f^2 - 60\text{ J} = - 12\text{ J}$

$$v_f^2 = \sqrt{\frac{- 12\text{ J} + 60\text{ J}}{2\text{ kg}}}$$

$$v_f = \sqrt{24\text{ m}^2/\text{s}^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_f = 4{,}9\text{ m/s}}$$

2.5 LA ENERGIA Y SU CONSERVACION

De lo analizado en los capítulos previos, podemos ver que de la relación trabajo - energía cinética se deduce que una partícula libre de fuerzas conserva su velocidad y por lo tanto su energía cinética. Luego clasificamos las fuerzas en conservativas y no conservativas. Vimos claramente que al actuar sobre una partícula fuerzas como la gravitatoria o la de un resorte, la energía cinética no se conserva, entonces introdujimos el concepto de energía potencial para poder decir después que lo que se conserva no es la energía cinética sino la energía mecánica, la que incluye una parte cinética y otra potencial. También hemos discutido casos en los que actúan sobre una partícula fuerzas no conservativas, en particular tratamos el de la fuerza de rozamiento, y vimos que tampoco se conserva la energía mecánica.

¿Y si ampliáramos la definición de energía para agregar un tercer término que no sea ni la cinética ni la potencial? Quizás, si resulta este intento, podremos decir que cuando hay rozamiento u otras fuerzas no conservativas, hay una energía que no es la mecánica que sí se conserva. Precisamente eso es lo que sucedió cuando el conde Rumford, en el año 1798, descubrió que la energía **perdida** se transformaba en calor. Podríamos así escribir que se conserva la siguiente suma:

Energía cinética + Energía potencial + Energía térmica (o calórica)

Los trabajos de James Joule, a mediados del siglo XIX, permitieron encontrar la manera cuantitativa en que equivalen una y otra forma de energía mecánica y calórica (o térmica).

Sin embargo, no todo termina con esas tres clases de energías: hay procesos, como por ejemplo la carga de una batería eléctrica, en los que no coincide el balance de energía mecánica y térmica. Si se desea **salvar** al principio de conservación de la energía, es necesario seguir inventando términos: energía eléctrica, energía química, y así, al parecer, indefinidamente.

Lo curioso es que esas invenciones no son arbitrarias: son formas de energía que realmente existen, y que pueden ser transformadas una en otra. Siempre se convierten en la misma proporción, por lo que puede afirmarse con propiedad que la energía no aparece ni desaparece, a lo sumo se transforma en otras clases de energía.

En 1939, cuando se descubrió que en ciertas reacciones nucleares la masa inicial de los reactivos no coincidía con la final, se halló una nueva e inesperada forma de energía: la sustancia. La sustancia puede transformarse, por ejemplo, en calor. Nos referimos a la reacción que sucede, por ejemplo, en el Sol, estrella en la que cada día desaparecen miles de millones de toneladas en el balance de las reacciones que transforman hidrógeno en helio, y aparece en su lugar energía térmica que es irradiada al espacio en forma de luz y otras radiaciones. Aún cuando se consideren la combustión del carbón con el oxígeno, la masa de las cenizas y el gas CO_2 resultante no cancelan exactamente con la del carbón y el oxígeno iniciales, sino que falta una pequeña cantidad de masa, que es la masa del calor generado en esa reacción. Se ha transformado masa en reposo en masa irradiada.

2.5.1 EQUIVALENCIA MASA - ENERGIA

La conservación de la masa y la conservación de la energía son dos principios fundamentales en los cuales se cimentaron la química y la física moderna. Fue Albert Einstein quien al formular la teoría de la relatividad fundió en un sólo principio a ambas leyes, las cuales parecían ser independientes. Según esta teoría, al aumentar la velocidad v de una partícula, aumenta su masa m y por lo tanto es necesario redefinir a la masa como

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1)$$

en donde m_0 es la masa de la partícula que se mide en un referencial en reposo respecto de ella, y c es la velocidad de la luz, cuyo valor es aproximadamente 3×10^8 m/s. Con esta nueva definición de la masa sigue teniendo validez la segunda ley de Newton. De acuerdo con los resultados de la teoría de Einstein, la energía mecánica de una partícula libre ya no adopta la expresión $(1/2)\ m_0\ v^2$, sino que es

$$E = m\ c^2,$$

donde m está dada por la expresión (1). Así una partícula en reposo y que no está sometida a ninguna fuerza tiene, según la relatividad una energía de reposo

$$E_0 = m_0\ c^2,$$

que podría irradiarse, si se produce la reacción adecuada.

En ciertos fenómenos nucleares en donde se pone más en evidencia la mecánica relativista, por ejemplo, la aniquilación de un electrón con un positrón (partícula análoga al electrón pero con carga positiva en vez de negativa). En este proceso desaparecen ambas partículas y se emiten dos rayos gamma que se propagan en sentidos opuestos con una energía electromagnética igual a la suma de las masas en reposo del electrón y del positrón multiplicada por la velocidad de la luz al cuadrado. Inversamente, puede ocurrir que en condiciones adecuadas se produzca la creación de un par electrón - positrón, al absorberse un rayo gamma con suficiente energía. Otro ejemplo es el de la formación de un deuterón (isótopo pesado del hidrógeno) a partir de la fusión de un protón y un neutrón. Las masas de un protón, un neutrón y un deuterón son 1,00783; 1,00867 y 2,01410 unidades de masa atómica. Una unidad de masa atómica equivale a $1{,}66 \times 10^{-27}$ Kg. Vemos que la masa del deuterón es menor que la suma de las masas del protón y del neutrón, la diferencia es 0,0024 unidades de masa atómica, lo cual equivale a una energía

$$E = \Delta m\ c^2 = 0{,}0024\ .\ 1{,}66\ 10^{-27}\ \text{Kg}\ .\ (3\ 10^8\ \text{m/s})^2$$

$$E = 3{,}59\ 10^{-13}\ \text{J} = 2{,}23\ \text{Mev}$$

Esta energía se emite en forma de radiación electromagnética gamma.

Nota: Muchas veces resulta poco práctico el uso de las unidades del SI. En particular mencionamos el uso del Angstrom (Å) para medir longitudes en el campo atómico. De la misma manera resulta útil contar con una unidad de energía apropiada a la física atómica y nuclear. Definimos entonces

el electrón - Volt: $1\ eV = 1{,}602\ 10^{-14}\ J$

y sus múltiplos

el kilo electrón - Volt: $1\ KeV = 10^3\ eV$

el mega electrón - Volt: $1\ MeV = 10^6\ eV$