UNIDAD 3 LEYES DE CONSERVACION

CAPITULO 1 TRABAJO Y ENERGIA

1.1 INTRODUCCION

En dinámica nos hemos ocupado de la partícula y las acciones que se ejercen sobre ella: las fuerzas.

Bajo la acción de las fuerzas, la segunda ley de Newton nos indica que la partícula cambia su vector velocidad, esto es, adquiere una aceleración:

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

que expresado de otra manera

$$\vec{F} = m\,\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{F}\,\Delta t = m\,\Delta\vec{v}$$

Esto nos indica que una fuerza aplicada durante un cierto intervalo de tiempo, produce cambios en la velocidad de la partícula. Si conocemos la fuerza actuante y el intervalo de tiempo durante el cual actuó, podemos conocer las nuevas variables cinemáticas, posición y velocidad al cabo de ese intervalo de tiempo.

Si $\vec{F}$ es constante y el movimiento es rectilíneo será entonces uniformemente variado y podemos escribir su ecuación horaria.

Pero, en general, en la naturaleza no encontramos con frecuencia fuerzas constantes, ya sea porque varían a lo largo del tiempo, o bien porque su valor depende de la posición de la partícula. En estos casos no es inmediatamente posible obtener la evolución del movimiento de la partícula a partir de la segunda ley de Newton, en la Unidad 2, sólo hemos trabajado con fuerzas constantes, como el peso, o bien en posiciones bien determinadas e instantáneas.

Pensemos en lo difícil que sería obtener la ley de variación de la fuerza de interacción entre una pelota de tenis y una pared (según lo que aprendimos, poniendo un dinamómetro entre ambas...) o bien conocer las interacciones a niveles subatómicos.

Pero podemos definir nuevas magnitudes físicas que nos permitan abarcar estos fenómenos desde otro ángulo y que igualmente nos permitan conocer la evolución de una partícula (o un conjunto de ellas) como consecuencia de las interacciones a las cuales está sometida por la comparación de estados iniciales (posición y velocidad inicial) con estados finales (posición y velocidad final), sin hacer caso a los detalles de la interacción misma.

Así es que vamos a derivar, como leyes globales del movimiento (y a partir de las leyes de Newton), ecuaciones conocidas como leyes de conservación.

Para cada una de estas leyes se define una nueva magnitud física que involucra las variables cinemáticas cuyo valor queda fijo e invariable a lo largo del proceso de interacción, por las condiciones cinemáticas iniciales de la partícula (o del conjunto de ellas).

La importancia de la validez de las leyes de conservación es que nos permite resolver problemas de movimiento bajo la acción de un conjunto de fuerzas en forma global, en lugar de hacerlo instante a instante a lo largo de la trayectoria, dichas leyes son las siguientes:

- Conservación de la energía.
- Conservación de la cantidad de movimiento.
- Conservación de la cantidad de movimiento angular.

Estas tres magnitudes han resultado ser de particular importancia en una gran variedad de campos de la física que van más allá de la mecánica clásica de lo cual nos ocuparemos en este curso (nos referimos a la física atómica y nuclear).

1.2 TRABAJO Y ENERGIA CINETICA

Pensemos, como ejemplo, en el movimiento que realiza un cuerpo en contacto con un resorte que se halla comprimido, apoyado sobre un plano, con rozamiento despreciable, del cual queremos saber con qué velocidad abandonó el resorte cuando este recuperó su longitud original:

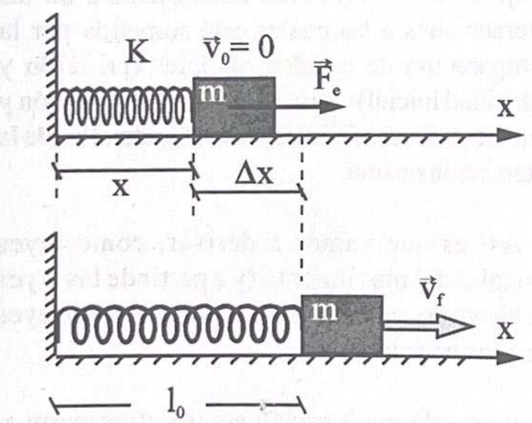


Fig. 1.1

Si suponemos que ese resorte es lineal (que cumple la ley de Hooke), la fuerza con que actúa sobre el cuerpo es

$$F = - K\,\Delta x = - K\,(x - l_0) = K\,(l_0 - x)$$

donde lo es la longitud del resorte cuando no está deformado. Si aplicamos la segunda ley al movimiento del cuerpo:

$$F = m\,a \Rightarrow K\,(l_0 - x) = m\,a$$

(movimiento rectilíneo a lo largo de x), de donde:

$$a = \frac{K}{m}(l_0 - x)$$

La aceleración depende linealmente de la posición (igual que la fuerza), y podemos graficarla. Observe que la aceleración es positiva para $x < l_0$ (compresión del resorte), negativa para $x > l_0$ (estiramiento) y nula para $x = l_0$ (resorte en posición neutra).

Para $x = x_0 = l_0 - \Delta x$ el cuerpo se acelera en el sentido positivo del eje x con $a = (K/m)\,\Delta x$.

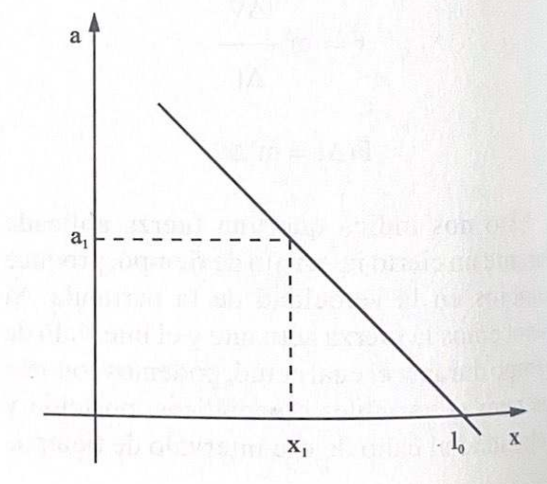


Fig. 1.2

¿Cómo determinar la velocidad instantánea al final del recorrido si $|\vec{a}|$ no es constante?. No hemos estudiado hasta ahora más que movimientos con $|\vec{a}|$ = cte.

Desde luego no es imposible responder la pregunta, pero requerirá de mayores conocimientos matemáticos y si la aceleración variara en forma aun más irregular, realmente sería muy complicado responder cuánto vale la velocidad final.

Veremos enseguida cómo resolver con facilidad este problema. Pero antes mostraremos el método con un caso más sencillo:

Supongamos que desde un sistema inercial se observa una partícula en equilibrio sobre la que no actúa fuerza alguna (se mueve con movimiento rectilíneo uniforme).

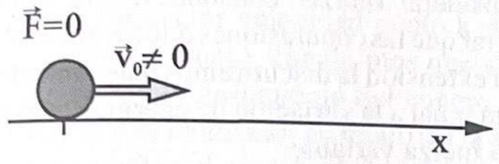


Fig. 1.3

Si le aplicamos en la dirección de la velocidad una fuerza constante en módulo, dirección y sentido, describirá un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

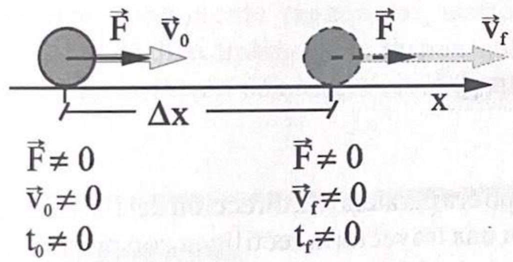


Fig. 1.4

Esto es, el movimiento quedará descripto por la ecuación horaria del MRUV:

$$x = x_0 + v_0\,(t - t_0) + \frac{1}{2}\,a\,(t - t_0)^2$$

Hagamos un poco de álgebra: si la aceleración es

$$a = \frac{v_f - v_0}{\Delta t}$$

El desplazamiento en este MRUV será:

$$\Delta x = v_0\,\Delta t + \frac{1}{2}\,a\,\Delta t^2 \;\Rightarrow$$

$$\Delta x = v_0\,\Delta t + \frac{1}{2}\,\frac{(v_f - v_0)}{\Delta t}\,\Delta t^2$$

o sea

$$\Delta x = \frac{1}{2}\,(v_f + v_0)\,\Delta t$$

Por otra parte, dado que $v_f = v_0 + a\Delta t$, a medida que aumenta el lapso Δt bajo la acción de la fuerza constante F, aumentan Δx y v_f. Existe una relación sencilla entre estas magnitudes:

$$F\,\Delta x = m\,a\,\Delta x = m\,\frac{(v_f - v_0)}{\Delta t}\,\frac{1}{2}\,(v_f + v_0)\,\Delta t$$

$$F\,\Delta x = \frac{1}{2}\,m\,(v_f^2 - v_0^2)$$

donde F indica el módulo de la fuerza $\vec{F}$, o sea:

$$F\,\Delta x = \frac{1}{2}\,m\,v_f^2 - \frac{1}{2}\,m\,v_0^2,$$

ya no figura el tiempo.

El producto de la fuerza por el desplazamiento del cuerpo bajo su acción resulta de la diferencia de dos cantidades de igual naturaleza, que dependen de las velocidades inicial y final del cuerpo en ese desplazamiento.

Esto nos sugiere que, al revés, si tenemos posibilidad de medir la velocidad de una partícula al comienzo y al final de un cierto trayecto, podemos, por simple diferencia de sus valores elevados al cuadrado y multiplicados por la mitad de su masa, evaluar ese producto $F\,\Delta x$ sin conocer necesariamente el valor de F.

Estas cantidades han resultado de gran utilidad y han merecido nombre propio:

$$F\,\Delta x = L_{\vec{F}} \qquad \textbf{Trabajo de la fuerza } \vec{F}$$

$$\frac{1}{2}\,m\,v^2 = Ec \qquad \textbf{Energía cinética del cuerpo.}$$

y podemos decir de ellas que la acción continuada de una fuerza aplicada en la misma dirección y con el mismo sentido que la velocidad modifica una magnitud física asociada al estado cinemático de la partícula (que llamamos energía cinética) en forma proporcional al desplazamiento realizado y a la intensidad de la fuerza.

La deducción que hemos hecho se limitó a considerar fuerzas constantes, a lo largo de trayectorias continuas. Sin embargo se puede demostrar que las conclusiones que hemos extraído se pueden extender a una situación más general. Esta extensión la discutiremos más adelante, en la sección 1.5, y la conclusión será que el trabajo será igual a la variación de energía cinética en todos los casos, aunque la trayectoria sea curva y la fuerza variable.

Esta relación se conoce con el nombre de:

Teorema del trabajo y la energía cinética $\qquad L_{\vec{F}} = \Delta Ec$

Por tanto, si sabemos calcular el trabajo realizado por una fuerza o un sistema de ellas, esto nos permite conocer la velocidad final, conocida la inicial. Dedicaremos las próximas secciones al cálculo de trabajos mecánicos en situaciones más complejas que la considerada arriba.

1.3 TRABAJO DE UNA FUERZA CONSTANTE

En el ejemplo anterior la fuerza aplicada sobre el cuerpo era paralela a la dirección del movimiento. En general, para una trayectoria cualquiera, o aún en una trayectoria rectilínea con presencia de otras fuerzas, las direcciones de los vectores fuerza y velocidad para un instante dado pueden no coincidir. Veremos cómo definir el trabajo de la fuerza, supuesta constante, en estas circunstancias.

Ejemplo 1.1:

En el movimiento circular uniforme, un cuerpo se mueve bajo la acción de una fuerza centrípeta, de modo que en todo punto de la trayectoria circular la fuerza es perpendicular a la velocidad (ver **Fig. 1.5**). ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza centrípeta en este movimiento?

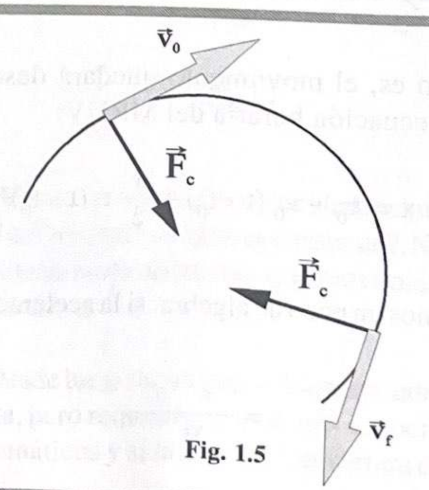


Fig. 1.5

Ejemplo 1.1:

Como antes, tomemos dos posiciones para los instantes t_0 y t_f, con velocidades $\vec{v}o$ y v_f respectivamente, y calculemos el trabajo de $\vec{F}$ con ***el teorema trabajo y energía cinética.***

$$L_{\vec{F}c} = \Delta E_c = \frac{1}{2} m\, v_f^2 - \frac{1}{2} m\, v_0^2$$

Pero, en un MCU, el módulo de la velocidad es constante,

$$v_f = v_0 \Rightarrow \Delta Ec = 0,\; L_{\vec{F}c} = 0.$$

Resulta pues que la fuerza centrípeta no realiza trabajo: su efecto es modificar la dirección de la velocidad pero no su magnitud. Este efecto ocurre siempre que la fuerza aplicada sea perpendicular al vector velocidad punto a punto. Como el vector velocidad es tangente a la trayectoria punto a punto, concluímos que una fuerza aplicada perpendicular a la trayectoria durante un dado desplazamiento del cuerpo no realiza trabajo, o lo que es lo mismo, no modifica la energía del cuerpo, y no cambia el módulo de la velocidad.

En general, la fuerza aplicada sobre un cuerpo que realiza un movimiento cualquiera es oblicua respecto a la trayectoria, es decir, puede descomponerse punto a punto en una componente tangencial (paralela a la velocidad en ese punto) y una componenete normal o centrípeta (perpendicular a la velocidad).

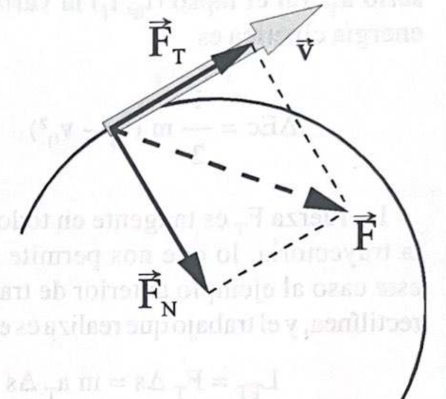
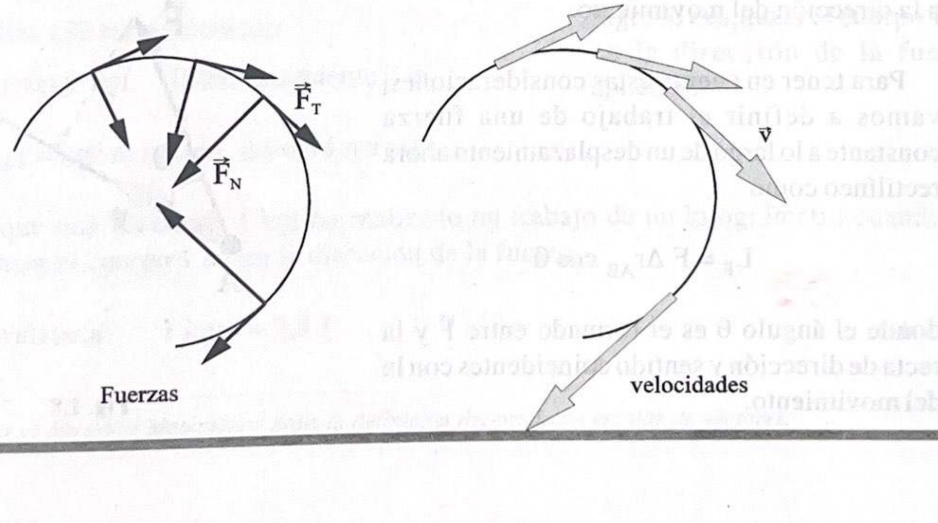


Fig. 1.6

La componente normal, como hemos visto, no realiza trabajo. La componente tangencial, como veremos enseguida, sí realiza trabajo y es responsable, por así decirlo, de la variación de energía cinética del cuerpo.

Ejemplo 1.2:

En la **Fig. 1.7** el móvil describe una trayectoria circular, tal que su velocidad crece uniformemente (movimiento circular uniformemente variado)



Ejemplo 1.2:

$$v(t) = a_T\, t \Rightarrow v_0 = a_T\, t_0$$

$$v_f = a_T\, t_f$$

Sobre el cuerpo actúa una fuerza oblicua de componentes de acuerdo a la segunda ley:

$$F_N = \frac{m\, v^2}{R} \quad ; \quad F_T = m\, a_T$$

y se observa que F_N varía con el tiempo al hacerlo v, mientras que F_T es constante al serlo a_T. En el lapso (t_0, t_f) la variación de energía cinética es

$$\Delta Ec = \frac{1}{2}\, m\, (v_f^2 - v_0^2)$$

La fuerza F_T es tangente en todo punto a la trayectoria, lo que nos permite asimilar este caso al ejemplo anterior de trayectoria rectilínea, y el trabajo que realiza es entonces:

$$L_{FT} = F_T\, \Delta s = m\, a_T\, \Delta s$$

donde Δs es el arco de circunferencia recorrido en el lapso $\Delta t = (t_f - t_0)$:

$$\Delta s = v_0\, \Delta t + \frac{1}{2}\, a_T\, \Delta t^2$$

(estamos utilizando la cinemática escalar para rectificar el movimiento curvo). Si procedemos como en el ejemplo anterior.

$$a_T = \frac{v_f - v_0}{\Delta t}, \quad y \quad \Delta s = \frac{v_0 + v_f}{2}\, \Delta t$$

$$L_{FT} = \frac{1}{2}\, m\, (v_f - v_0)\, \frac{1}{2}\, (v_f + v_0)$$

$$L_{FT} = \frac{1}{2}\, m\, v_f^2 - \frac{1}{2}\, m\, v_0^2$$

y entonces

$$L_{FT} = \Delta Ec$$

El trabajo de la componente tangencial es así igual a la variación de la energía cinética del cuerpo.

Resulta entonces que en el caso de una fuerza oblicua respecto de la dirección de movimiento sólo realiza trabajo (modifica la energía cinética del cuerpo) la componente de la fuerza paralela a la dirección del movimiento.

Para tener en cuenta estas consideraciones, vamos a definir el trabajo de una fuerza constante a lo largo de un desplazamiento ahora rectilíneo como

$$L_F = F\, \Delta r_{AB}\, \cos\theta$$

donde el ángulo θ es el formado entre $\vec{F}$ y la recta de dirección y sentido coincidentes con la del movimiento.

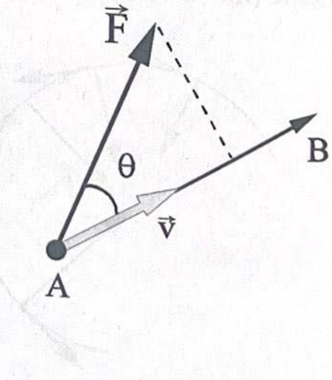


Fig. 1.8

Observe que $F \cos\theta$ es la magnitud de la componente de $\vec{F}$ paralela a la dirección del movimiento. El precisar acerca del sentido del movimiento nos dice que θ es el ángulo entre los vectores $\vec{F}$ y $\vec{v}$. Si $\theta < 90°$, la componente tangencial de $\vec{F}$ y v tienen el mismo sentido: el móvil se acelera y aumenta su energía cinética; por la otra parte $\cos\theta$ es positivo y el trabajo también lo es, en coincidencia con el aumento de la energía cinética.

Si $\theta > 90°$, la componente tangencial de $\vec{F}$ se opone a v; el móvil se frena y su energía cinética disminuye; como además $\cos\theta < 0$ en este caso, el trabajo es negativo, nuevamente de acuerdo con la variación - ahora negativa - de energía cinética. Por lo tanto es necesario definir el ángulo θ como lo hemos hecho para mantener el teorema trabajo - energía.

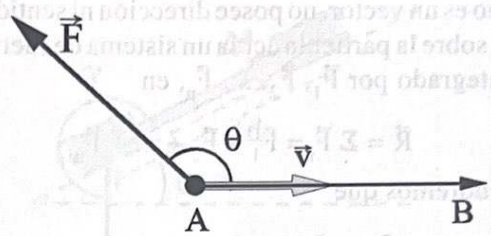


Fig. 1.9

Con ayuda de la notación vectorial, podemos decir que se trata del producto escalar entre el vector fuerza aplicada $\vec{F}$ y el vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$:

$$L_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = |\vec{F}|\,|\Delta\vec{r}| \cos\theta \qquad (*)$$

donde $\Delta\vec{r}$ tiene la dirección y sentido del movimiento.

1.3.1 UNIDADES

La unidad de trabajo se deriva de las fundamentales aplicando la definición.

Sistema **M K S**:

[Fuerza]: N ; [Desplazamiento]: m

$$[L_{\vec{F}}] = N\,m = \frac{kg\,m^2}{s^2} = J \text{ (Joule)}$$

Aclaración: los corchetes se leen como "unidades de". Se dice que una fuerza de 1 N ha realizado un trabajo de 1 Joule cuando ha logrado desplazar el cuerpo 1 m, en la dirección de la fuerza aplicada.

Si se utiliza (Sistema Técnico):

[Fuerza]: kgf, [Desplazamiento]: m

$$[L_F] = kgf\,m = kgm \text{ (kilográmetro)}$$

Se dice que una fuerza de 1 kgf ha realizado un trabajo de un kilográmetro cuando ha logrado desplazar el cuerpo 1 m, en la dirección de la fuerza.

Equivalencia: 1 kgm = 9,8 J

* *Puede consultar el Apéndice Matemático para la definición del producto escalar de vectores.*

1.4 TRABAJO DE UN SISTEMA DE FUERZAS

Cuando hay más de una fuerza que actúa sobre la partícula, habremos de calcular por separado el trabajo realizado por cada una de las fuerzas que actúan y luego sumarlos, o de modo equivalente, calculamos directamente el trabajo de la fuerza resultante $\vec{R}$

Puesto que el trabajo es una magnitud escalar (no es un vector, no posee dirección ni sentido), si sobre la partícula actúa un sistema de fuerzas integrado por $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_n$, en

$$\vec{R} = \Sigma\, \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n$$

tendremos que

$$L_{\vec{R}} = L_{\vec{F}1} + L_{\vec{F}2} + ... + L_{\vec{F}n}$$

El trabajo de la resultante de varias fuerzas aplicadas a la misma partícula es igual a la suma de los trabajos de las fuerzas componentes.

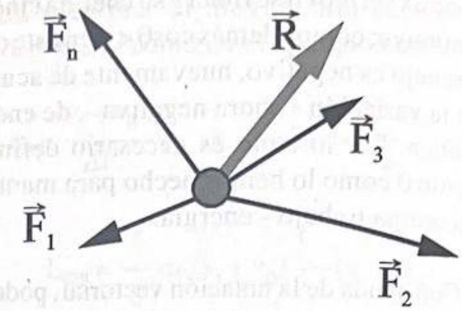


Fig. 1.10

Ejemplo 1.3:

Un cuerpo de masa m = 1 kg asciende por un plano inclinado un ángulo θ de 30° bajo la acción de una fuerza $\vec{F}$ tal que realiza un MRU. Calcular el trabajo de cada una de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo si asciende hasta una altura de 1 m. Calcular el trabajo total realizado sobre el cuerpo.

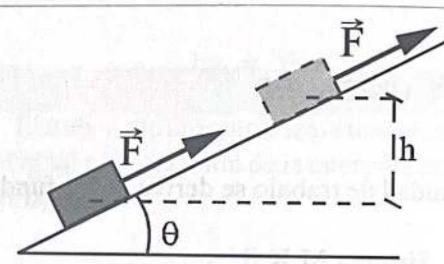


Fig. 1.11

1 - Diagrama de cuerpo desvinculado

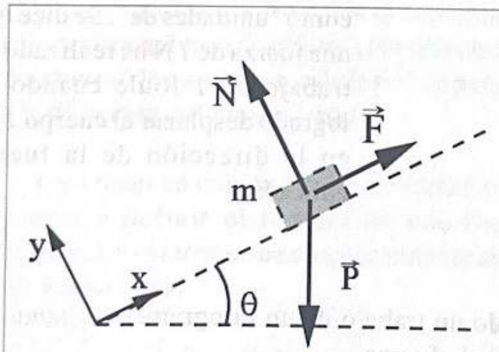


Fig. 1.12

El desplazamiento ($\Delta\vec{r}$) del cuerpo o la distancia (d) que recorre, a lo largo del plano es

$$d = \frac{h}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1\ m}{\operatorname{sen} 30°} = 2\ m$$

Si el movimiento se realiza a velocidad constante, significa que

$$\Sigma\, Fx = 0 \Rightarrow F - mg \operatorname{sen}\theta = 0$$

$$F = m\, g \operatorname{sen}\theta$$

$$\Sigma\, Fy = 0 \Rightarrow N - P\cos\theta = 0$$

$$N = P\cos\theta$$

Ejemplo 1.3:

2 - Calculemos los trabajos de cada fuerza:

$$L_{\vec{F}} = m\ g\ \text{sen}\ \theta\ d \cos 0°$$

$$= 1\ \text{kg}\ 10\ \text{m/s}^2\ 0{,}5\ .\ 2\ \text{m}\ .\ 1$$

$$\boxed{L_{\vec{F}} = 10\ \text{J}}$$

$$L_{\vec{P}} = m\ g\ d \cos \theta'$$

$$= 1\ \text{kg}\ 10\ \text{m/s}^2\ 2\ \text{m}\ (-0{,}5)$$

$$\boxed{L_{\vec{P}} = -\ 10\ \text{J}}$$

$$L_{\vec{N}} = m\ g \cos \theta\ d \cos 90°$$

$$\boxed{L_{\vec{N}} = 0\ \text{J}}$$

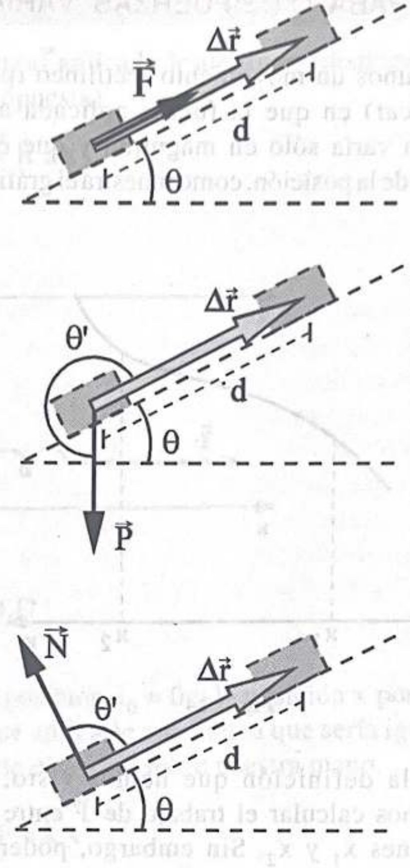


Fig. 1.13

$$\Sigma\ L = L_{\vec{F}} + L_{\vec{P}} + L_{\vec{N}} = 10\ \text{J} - 10\ \text{J} + 0 = 0$$

Resultado esperado, puesto que si el movimiento es uniforme, significa que

$$\Sigma\ \vec{F} = \vec{R} = 0 \ \Rightarrow\ L_{\vec{R}} = 0$$

Conclusión que, por otra parte, podríamos haber obtenido en forma inmediata recurriendo al teorema del trabajo y la energía cinética, puesto que al ser la velocidad constante, implicaría que no hay variación de energía cinética del cuerpo, eso indicaría que el trabajo de la fuerza resultante (trabajo neto) sobre el cuerpo es nulo. Habría bastado este simple razonamiento para evitarnos los cálculos.

1.5 TRABAJO DE FUERZAS VARIABLES

Supongamos un movimiento rectilíneo (para simplificar) en que la fuerza aplicada a la partícula varía sólo en magnitud y que ésta depende de la posición, como muestra el gráfico.

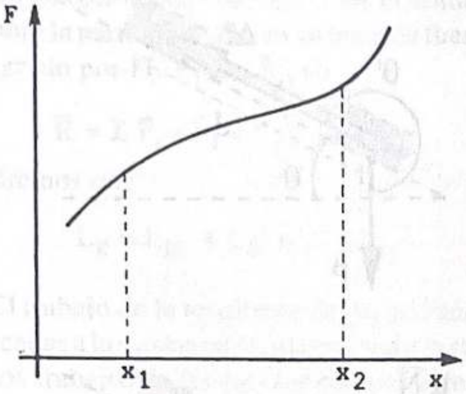


Fig. 1.14

Por la definición que hemos visto, no podríamos calcular el trabajo de $\vec{F}$ entre las posiciones x_1 y x_2. Sin embargo, podemos recurrir a este artificio de integración: suponer pequeños desplazamientos Δx_1, Δx_2, Δx_3, etc., que sumados representen $\Delta x = x_2 - x_1$ tales que, en cada pequeño desplazamiento podemos aproximar la $\vec{F}$ a un valor considerado constante (promedio entre el valor al comienzo y al final de cada intervalo).

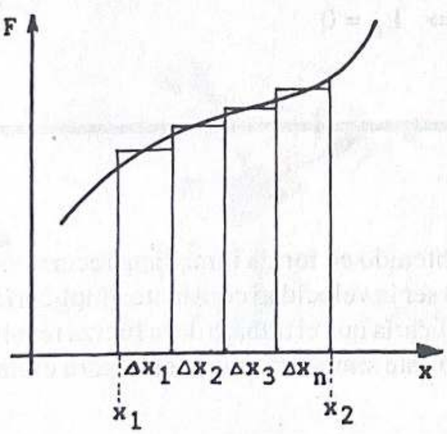


Fig. 1.15

En cada intervalo se realizará un trabajo que definimos para fuerzas constantes

$$L_{\vec{F}} = F\,\Delta x$$

tal que

$$\Delta L_1 = F_1\,\Delta x_1$$

$$\Delta L_2 = F_2\,\Delta x_2$$

$$\cdots\cdots$$

$$\Delta L_3 = F_3\,\Delta x_3$$

El trabajo total realizado entre x_1 y x_2 será la suma de todos los trabajos parciales

$$L_{\vec{F}} = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \ldots$$

$$L_{\vec{F}} = \Sigma\, F_i\,\Delta x_i$$

Para lograr mayor precisión, bastará con achicar cada vez más los intervalos en que se ha subdividido el desplazamiento Δx a fin de asegurar menor variación de la función en cada uno de ellos.

Esto es, para intervalos que tienden a cero, podemos escribir

$$L_{\vec{F}} = \lim_{\Delta x \to 0} \Sigma\, F_i\,\Delta x_i$$

Si observamos el gráfico, podemos constatar que la suma de todos los productos $F_i\,\Delta x_i$, o sea la $\Sigma F_i\,\Delta x_i$ representa geométricamente con buena aproximación el área debajo de la curva entre los valores x_1 y x_2, expresada en las unidades de las escalas empleadas.

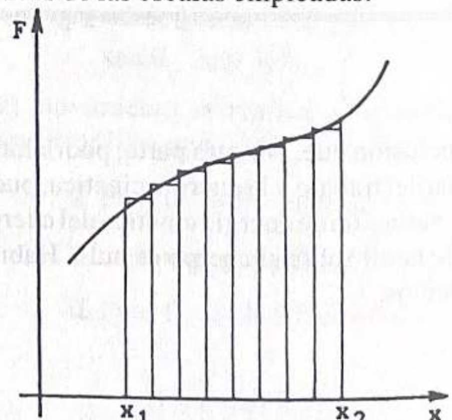


Fig. 1.16

Esto nos da una herramienta práctica para calcular trabajos de fuerzas variables.

Retomemos el ejemplo del resorte al que estira una fuerza $\vec{F}$ aplicada desde afuera (distingamos entre una fuerza y la que hace el propio resorte que es opuesta)

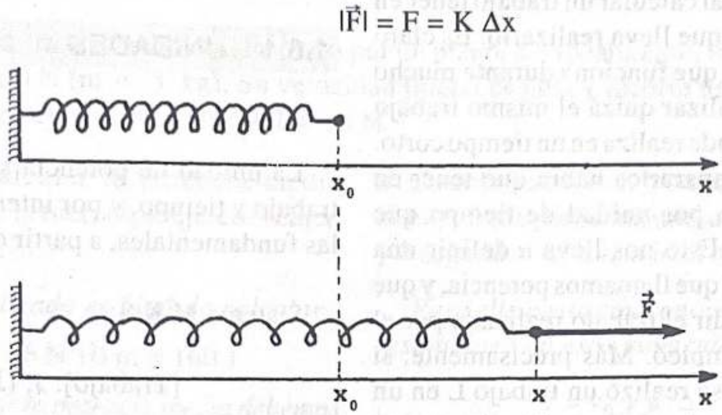


Fig. 1.17

Si quisiéramos calcular el trabajo realizado entre la posición $x_0 = 0$ y la posición x por una fuerza $\vec{F}$ aplicada al resorte para estirarlo tendríamos que aplicarle una fuerza que sería igual y contraria a la fuerza elástica de restitución que el resorte ejercería sobre nuestra mano.

$$F = m\,a \;\Rightarrow\; F = k\,x$$

cuya gráfica sería, si se trata de un resorte hookeano lineal:

Como dijimos, el trabajo es el área bajo la curva,

Area = ½ base . altura

$$L_F = [\text{Area}] = \tfrac{1}{2}\ x\ K\,x$$

$$L_F = \tfrac{1}{2}\,K\,x^2$$

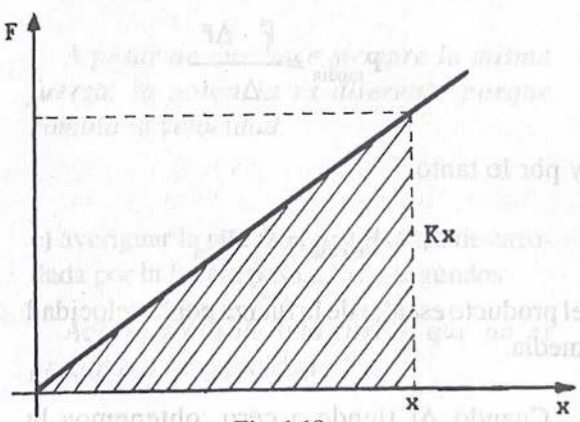


Fig. 1.18

Este trabajo siempre es positivo, tanto al estirarlo como al comprimirlo, ya que depende de x^2, que será positivo independientemente del signo de x. En términos físicos, el trabajo de la fuerza que deforma al resorte es siempre positivo porque se lo estira o comprime, la fuerza siempre tiene el mismo sentido que el desplazamiento.

Esta expresión, veremos más adelante, también recibe su nombre propio, energía potencial elástica, y se mide en Joule. Es el resultado del trabajo realizado sobre el resorte y depende del valor absoluto del estiramiento o compresión.

1.6 POTENCIA

A menudo es útil al calcular un trabajo tener en cuenta el tiempo que lleva realizarlo. Es claro que un motorcito que funciona durante mucho tiempo puede realizar quizá el mismo trabajo que un motor grande realiza en un tiempo corto. Si queremos compararlos habrá que tener en cuenta el trabajo por unidad de tiempo que pueden realizar. Esto nos lleva a definir una nueva magnitud que llamamos potencia, y que proviene de dividir el trabajo realizado por el tiempo que se empleó. Más precisamente, si sobre un cuerpo se realizó un trabajo L en un cierto intervalo de tiempo Δt, llamamos **potencia media** en ese intervalo al cociente:

$$P_{media} = \frac{L}{\Delta t}$$

Para el caso de un tramo recto y fuerza constante, es

$$L = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

y tendremos

$$P_{media} = \frac{\vec{F} \cdot \Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

y por lo tanto

$$P_{media} = \vec{F} \cdot \vec{v}_m$$

el producto escalar de la fuerza por la velocidad media.

Cuando Δt tiende a cero, obtenemos la potencia instantánea:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$P = |\vec{F}|\ |\vec{v}| \cos\theta$$

que relaciona la potencia instantánea con la velocidad instantánea.

1.6.1 UNIDADES

La unidad de potencia se deriva de las de trabajo y tiempo, y por intermedio de ellas, de las fundamentales, a partir de la definición:

Sistema M K S:

[Trabajo]: J, (Joule)

[Tiempo]: s, (segundo)

$$[\text{Potencia}] = \frac{J}{s} = \frac{N\,m}{s} = \text{watt}$$

1 watt es entonces la potencia desarrollada por una fuerza que realiza un trabajo de 1 J en un tiempo de 1 s.

Estime, como ejercicio, cuántos watt de potencia puede desarrollar un ser humano.

Otras unidades: si se mide el trabajo en kgf m, y el tiempo en s, la unidad de potencia es el kgf m/s;

$$1 \text{ kgf m/s} = 9{,}8 \text{ watt}$$

Otra unidad muy utilizada es el HP, equivalente a 76 kgf m/s. Si una persona de 76 kg sube una escalera a 1 m/s, desarrolla una potencia de un caballo.

Ejemplo 1.4:

Un chico arrastra un carrito cuesta arriba por un plano, sin rozamiento, inclinado a 30°. El carrito pesa 30 N (m = 3 kg). Su velocidad inicial es nula y recorre una distancia de 10 m; si el chico ejerce una fuerza $|F| = 16$ N,

a) Se desea calcular la potencia media desarrollada por la fuerza que ejerce el chico en ese trayecto:

El trabajo realizado es fácil de calcular:

$$L = 16 \text{ N } 10 \text{ m} = 160 \text{ J}$$

Para calcular la potencia media debemos hallar el tiempo que tarda en subir. Para ello averiguaremos la aceleración:

$$F - P \operatorname{sen} \theta = m\, a$$

$$16 \text{ N} - 30 \text{ N} \operatorname{sen} 30° = 3 \text{ kg } a$$

$$a = \frac{16 \text{ N} - 15 \text{ N}}{3 \text{ kg}} \approx 0{,}33 \text{ m/s}^2$$

Ahora podemos averiguar el tiempo

$$\Delta x = v_0 \; \Delta t + \frac{1}{2} a \; \Delta t^2$$

$$10 \text{ m} = 0 + \frac{1}{2} 0{,}33 \text{ m/s}^2 \, \Delta t^2$$

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2 \,.\, 10 \text{ m}}{0{,}33 \text{ m/s}^2}} = \sqrt{60 \text{ s}^2} \approx 7{,}75 \text{s}$$

por lo tanto

$$P_{media} = \frac{L}{\Delta t} = \frac{160 \text{ J}}{7{,}7 \text{ s}}$$

$$\boxed{P_{media} = 20{,}6 \text{ watt}}$$

b) Calcular también la potencia instantánea desarrollada por la misma fuerza, a los 2; 4 y 6 segundos de iniciado el ascenso.

Para ello basta con conocer la velocidad instantánea en esos momentos:

$$v = v_0 + a \; \Delta t$$

a los 2 s: $v = 0{,}33 \text{ m/s}^2 \; 2 \text{ s} = 0{,}66 \text{ m/s}$

a los 4 s: $v = 0{,}33 \text{ m/s}^2 \; 4 \text{ s} = 1{,}32 \text{ m/s}$

a los 6 s: $v = 0{,}33 \text{ m/s}^2 \; 6 \text{ s} = 1{,}98 \text{ m/s}$

La potencia instantánea será ($P = \vec{F} \cdot \vec{v}$):

a los 2 s: $P = 16 \text{ N } 0{,}66 \text{ m/s} = 19{,}56$ watt

a los 4 s: $P = 16 \text{ N } 1{,}32 \text{ m/s} = 21{,}12$ watt

a los 6 s: $P = 16 \text{ N } 1{,}98 \text{ m/s} = 31{,}68$ watt

A pesar de que hace siempre la misma fuerza, la potencia es diferente porque cambia la velocidad.

c) averiguar la potencia instantánea desarrollada por la fuerza peso a los 4 segundos:

Acá se trata de una fuerza que no es paralela a la velocidad:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = |\vec{F}|\,|\vec{v}| \cos 120° =$$

$$= 30 \text{ N } 1{,}32 \text{ m/s } \; (-0{,}5)$$

$$\boxed{P = -19{,}8 \text{ watt}}$$