CAPITULO 2

CUERPOS EXTENSOS

2.1- Equilibrio de cuerpos extensos

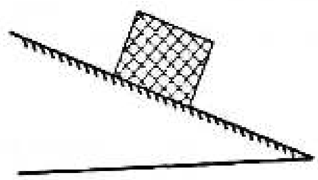
Hasta el momento hemos tratado con sistemas de fuerzas aplicadas sobre un *cuerpo puntual*, es decir un objeto de extensión idealmente nula. Por lo tanto tal objeto se puede representar por un punto y el sistema de fuerzas debe ser *concurrente* a ese punto. Este sistema es equivalente a una única fuerza, la *resultante*, bajo cuya acción el cuerpo puntual se acelera de acuerdo a la segunda ley de Newton, en la dirección y sentido de la fuerza resultante impulsora. Este movimiento suele denominarse *translación* de la partícula respecto de un sistema de referencia inercial arbitrario.

Otra situación se presenta cuando el objeto sobre el cual actúan las fuerzas es un *cuerpo extenso*. En tal caso los puntos de aplicación de las fuerzas del sistema generalmente no coinciden, por lo cual no tenemos fuerzas concurrentes.

Desde el punto de vista del movimiento posible del cuerpo, esta característica resulta en que, además de trasladarse por el espacio, un cuerpo extenso puede girar alrededor de un eje, como, por ejemplo, un tornillo que simultáneamente gira alrededor de su eje central y avanza a lo largo del mismo.

El movimiento más general de un cuerpo extenso puede siempre describirse como superposición de dos más sencillos, a saber:

Traslaciones: todos los puntos del cuerpo tienen en determinado instante la misma velocidad (vectorial). Esta velocidad puede variar en el tiempo, pero es la misma para todo punto del objeto, instante a instante. Por ejemplo, un bloque que desliza a lo largo de un plano inclinado.



Rotaciones: los puntos del cuerpo giran alrededor de un eje común que puede o no mantenerse fijo con el transcurrir del tiempo. El plato de un tocadiscos es un ejemplo de rotación.

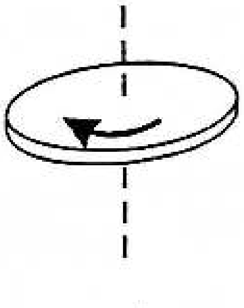


Fig. 1

Salvo cuando se trata de una translación a velocidad constante, o una rotación alrededor de cualquier eje con velocidad angular constante respecto de un sistema de referencia inercial, todo otro movimiento es acelerado y está asociado a la acción de un sistema de fuerzas exteriores aplicado sobre el cuerpo.

En la estática, nuestro objetivo es hallar las condiciones que debe cumplir tal sistema de fuerzas para producir equilibrio, o aceleración nula de todos los puntos del cuerpo (siempre respecto de un sistema de referencia inercial).

2.2 - Cuerpo rígido

Los cuerpos extensos reales experimentan deformaciones más o menos acentuadas, temporarias o permanentes, bajo la acción de fuerzas aplicadas. Una bandita de goma es un objeto evidentemente deformable, pero hasta un objeto tan duro como una barra de acero se puede "estirar" o "comprimir" hasta quebrarse si se aplican esfuerzos suficientemente intensos. Las deformaciones de los cuerpos constituyen una seria complicación en nuestro estudio introductorio de la estática, dado que el objeto modifica sus proporciones geométricas y las distancias entre sus partes, y no es fácil determinar cómo lo hace, debido a la complejidad de las interacciones internas entre sus átomos, responsables de la cohesión del conjunto. Entonces, frente a un objeto que se deforma, debemos tener en cuenta el sistema de fuerzas aplicadas o externas junto al conjunto de fuerzas de cohesión o internas cuyo gran número y comportamiento conjunto vuelven al problema de difícil solución.

Por esta razón vamos a introducir una hipótesis de trabajo que nos permitirá tratar con relativa sencillez gran cantidad de casos de importancia práctica donde las deformaciones (siempre presentes) son efectos despreciables por su pequeñez frente a los efectos globales de cambio del estado de movimiento del objeto en su conjunto: la ***hipótesis de cuerpo rígido***.

Un *cuerpo rígido* es un cuerpo ideal que no experimenta deformaciones bajo la acción de fuerzas aplicadas, o lo que es lo mismo la distancia entre dos cualquiera de sus puntos permanece invariante, independientemente de que actúen o no fuerzas sobre él, y de la intensidad de estas fuerzas aplicadas. El efecto de las fuerzas aplicadas será entonces únicamente modificar su estado de movimiento, es decir, producir aceleraciones.

Una consecuencia importante de la hipótesis de cuerpo rígido es que las fuerzas aplicadas se pueden trasladar a lo largo de su recta de acción. Esto significa que las fuerzas aplicadas pueden ser representadas por vectores, tal que su punto de aplicación puede ser cualquiera sobre su recta de acción, sin que se modifiquen los efectos que esa fuerza produce.

Así, es equivalente aplicar la fuerza $\vec{F}$ en **A** o en **B**.

Esta propiedad nos permite "trasladar" fuerzas a lo largo de sus rectas de acción sin modificar sus efectos sobre el cuerpo rígido, a fin de componer fuerzas aplicadas en distintos puntos. No importa si esta operación nos lleva a puntos que estén afuera del cuerpo. Hallada la composición de fuerzas, podemos volver a trasladar la resultante a lo largo de *su* recta de acción y aplicarla a cualquier punto de la misma *dentro* del cuerpo.

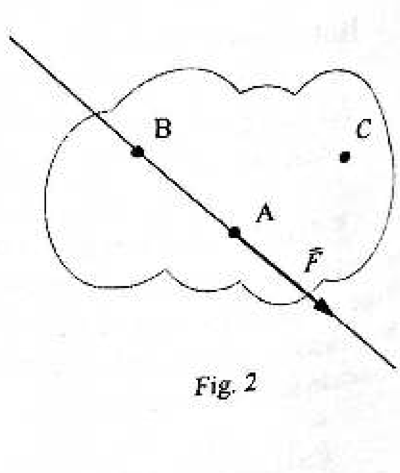


Fig. 2

¿Qué pasa si trasladamos la fuerza de un punto situado *fuera* de su recta de acción? Da por resultado un sistema de fuerzas *no* equivalente con el original, es decir, que no produce los mismos efectos. Podemos aclarar esto mediante un ejemplo.

Aplicamos dos fuerzas paralelas, de sentidos opuestos e igual módulo $\vec{F_1} = -\vec{F_2} = \vec{F}$ a dos puntos a dos puntos **A** y **B** del cuerpo que no se encuentren en la misma recta de acción.

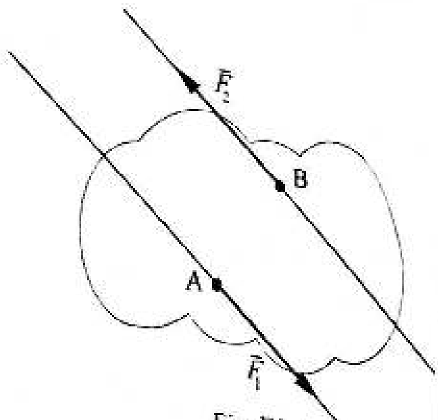


Fig. E1a

Supongamos que pudiéramos trasladar a $\vec{F_2}$ *fuera* de su recta de acción. Entonces el traslado de desde **B** a **A** no modificaría los efectos del sistema de fuerzas aplicado sobre el cuerpo rígido.

Efectuando el traslado observamos que sobre el punto **A** actúan dos fuerzas iguales y opuestas por lo que se anulan entre sí y el sistema resulta en equilibrio.

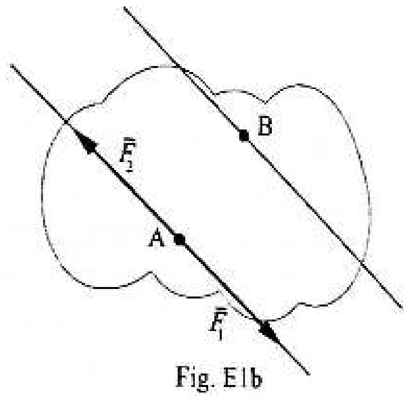


Fig. E1b

Sin embargo esto no es correcto. Por la acción del par de fuerzas $\vec{F_1}$ y $\vec{F_2}$ el cuerpo, si estaba inicialmente quieto, girará aceleradamente. Es el principio de funcionamiento del tirabuzón. Aplicando un par de fuerzas iguales y opuestas sobre sus extremos, el tirabuzón gira si inicialmente no lo hacia, el sistema no se encuentra entonces en equilibrio porque el cuerpo gira aceleradamente, es decir, con velocidad de giro variable.

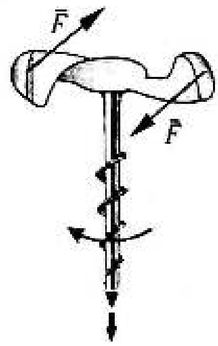


Fig. E1c

Concluimos entonces que el trasladar una fuerza fuera de su recta de acción produce un sistema de fuerzas no equivalente al original.

Observamos en este ejemplo que el traslado de $\vec{F_2}$ de **B** a **A** elimina el efecto de giro del sistema original ($\vec{F_1}, \vec{F_2}$). Ocurre una situación análoga al querer trasladar $\vec{F_1}$ de **A** a **B**.

Sin embargo, podemos trasladar una fuerza fuera de su recta de acción si contabilizamos adecuadamente los efectos de giro que ello produce. Para hacerlo necesitamos usar una nueva magnitud física que describiremos a continuación.

2.3 - Momento de una fuerza. Cupla

Un sistema de fuerzas aplicado a un cuerpo rígido puede producir los siguientes efectos: una aceleración de traslación, una aceleración de rotación o una combinación de ambas.

La aceleración de traslación está asociada al sistema de fuerzas aplicado al objeto independientemente de los puntos de aplicación de los mismos. La aceleración de rotación está asociada al sistema de fuerzas aplicado y a la posición de los puntos de aplicación de ellas.

Para contemplar ambas características introducimos una magnitud que llamaremos *momento de una fuerza respecto de un punto.*

Definimos a esta magnitud como el producto del módulo de la fuerza por la distancia entre el punto, elegido por ejemplo **O**, y la recta de acción de la fuerza. Note que distancia *siempre* se mide perpendicularmente a la recta de acción. Para los datos de la figura usamos la notación:

$$M_O = F \, . \, d$$

Observe que si el cuerpo está inicialmente en reposo, si invertimos el sentido de la fuerza $\bar{F}$ estamos invirtiendo el sentido del giro provocado: en el caso (a) $\bar{F}$ acelera al cuerpo en sentido antihorario alrededor de **O** mientras que en el caso (b) la aceleración es en sentido horario. Sin embargo, el producto $F \, . \, d$ es el mismo para ambos casos. Para poder distinguir ambos casos y conocer la aceleración de giro que produce una fuerza sobre el cuerpo adoptamos la siguiente *convención:* damos *signo positivo* al momento de una fuerza respecto a un punto cuando el giro tiene sentido antihorario y *signo negativo* cuando el giro es horario. Así para la Fig. 3a y la Fig. 3b [1]

Caso (a): sentido antihorario $\Rightarrow \quad M_O = F \, . \, d$
Caso (b): sentido horario $\Rightarrow \quad M_O = - F \, . \, d$

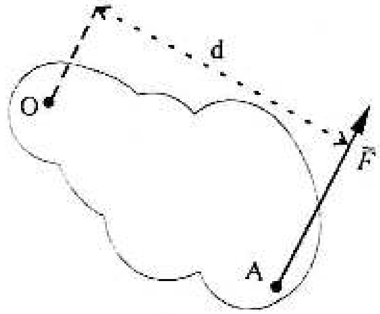


Fig. 3a

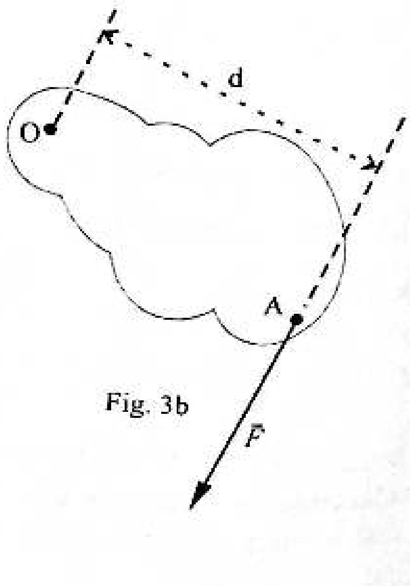


Fig. 3b

1 *Se ha supuesto reposo inicial. Si el cuerpo estuviera inicialmente girando hacia la derecha la aplicación de una cupla hacia la izquierda lo iría frenando. Hasta que ello ocurra, el sentido de la cupla es* ***opuesto*** *al sentido de giro.*

Al igual que las fuerzas, los momentos de un sistema de fuerzas se suman. En el caso de un sistema fuerzas coplanares aplicado a un cuerpo rígido, que es el que trataremos en este curso, los momentos de las distintas fuerzas se distinguen por su signo y se suman algebraicamente.

Vamos a aplicar esta propiedad al sistema de un par de fuerzas paralelas, de igual módulo y sentidos opuestos, que hemos venido analizando en relación a los posibles giros de un cuerpo rígido.

Sea un cuerpo inicialmente en reposo.

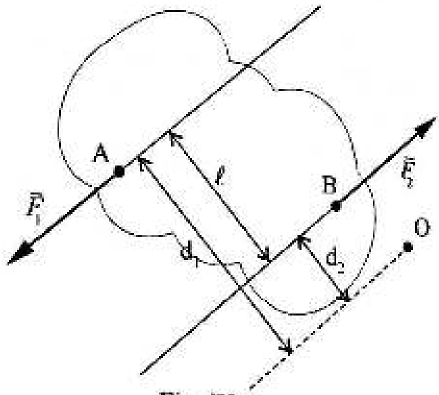


Fig. E2a

Tenemos $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = F$. La distancia entre las rectas de acción es l y las distancias de cada una de estas rectas al punto **O**, que elegimos arbitrariamente como *centro de momentos*, son d_1 y d_2, respectivamente. Note que hemos elegido el punto **O** fuera del cuerpo, y que las distancias se miden perpendicularmente a las rectas de acción.

El momento de $\vec{F}_1$ respecto de **O** es $M_{O1} = F \cdot d_1$ (positivo porque su efecto es producir un giro antihorario) y el momento de $\vec{F}_2$ respecto de **O** es $M_{O2} = -F \cdot d_2$ (negativo por que el efecto es producir un giro horario). El momento *total* del sistema de fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ respecto de **O** será entonces:

$$M_O = M_{O1} + M_{O2} = F \cdot d_1 - F \cdot d_2 = F(d_1 - d_2) \Rightarrow \boxed{M_O = F \cdot l}$$

Ya que, como se ve en la figura, $d_1 - d_2 = l$, observe que esta igualdad no depende de la ubicación de O. Por ejemplo, si tomamos como centro de momentos el punto **A**, tenemos:

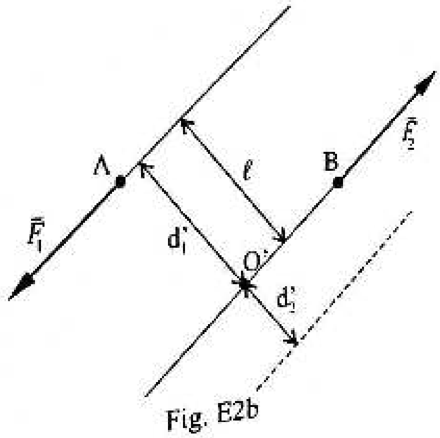


Fig. E2b

$M_{A1} = 0$ (la recta de pasa por **A**)

$M_{A2} = F \cdot l \Rightarrow M_A = F \cdot l$

Y de la misma manera con **B**:

$M_{B1} = 0$ (la recta de pasa por B)

$M_{B2} = F \cdot l \Rightarrow M_B = F \cdot l$

Finalmente, si ubicamos el centro de momentos **O'** entre las rectas de acción tenemos:

$$M_{O'1} = F \cdot d'_1 \quad , \quad M_{O'2} = F \cdot d'_2 \quad \text{(ambos positivos)}$$

Luego:

$$M_{O'} = F \cdot (d'_1 + d'_2) \Rightarrow \boxed{M_{O'} = F \cdot l}$$

Ya que $(d'_1 + d'_2) = l$

En resumen, éste es un resultado notable. El momento total de este peculiar sistema de fuerzas *no depende* del centro de momentos elegido. En otros sistemas, sí dependería.

Llamamos *cupla* (o también *par, torca o torque*) a este sistema de un par de fuerzas paralelas, de igual módulo, sentidos opuestos con rectas de acción distintas, cuya característica esencial o definitoria es que su momento total es independiente del centro de momentos elegido. Llamamos *momento de la cupla* a la cantidad $M = F \cdot l$.

Observe que, por otra parte, la suma vectorial de fuerzas de una cupla es nula: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$. Entonces el cuerpo sobre el que actúa una cupla no se traslada, si inicialmente no lo hacía, sino que únicamente gira, si inicialmente no giraba. Volveremos sobre esto en la siguiente sección. Viceversa, un sistema cualquiera de fuerzas aplicadas al cuerpo cuyo único efecto sea únicamente un giro acelerado sin traslación acelerada es equivalente a una cupla del mismo momento que la suma de momentos de las fuerzas del sistema, con respecto a cualquier centro de momentos.

Veamos algunas propiedades del sistema de fuerzas que llamamos cupla.

Conclusiones a modo de diálogo:

- ¿Son todas las posibles cuplas equivalentes?
- Evidentemente no. Su momento depende de la intensidad F de las fuerzas que la componen y de la distancia l entre sus rectas de acción, y los efectos que producen están ligados al momento. Así, si yo no puedo girar con las manos una tuerca oxidada porque el momento que aplico es insuficiente para romper la capa de óxido que la atasca al tornillo, lo consigo fácilmente usando una llave apropiada, la que me permite aplicar un momento mayor.
- Bien. Supongamos que F y l son las mismas cantidades para dos cuplas. Entonces el momento $M = F \cdot l$ es el mismo para ambas.
- No. Depende del *sentido* de giro del cuerpo rígido sobre el que actúa la cupla. Observemos la Fig. 3a y la Fig 3b, se trata del mismo cuerpo, fuerzas de igual intensidad aplicadas sobre los mismos puntos, de la misma dirección y separadas en la misma distancia. Sin embargo, en el caso (a), el efecto de la cupla es acelerar el cuerpo en sentido antihorario, en el caso (b) la aceleración de giro tiene sentido horario. Recordando la convención de signos para los momentos, en el caso (a) adoptemos signo positivo y en el caso (b) signo negativo para el momento de las cuplas:

(a) $\Rightarrow$ $M = F \cdot l$

(b) $\Rightarrow$ $M' = -F \cdot l$

Y distinguimos cuplas de momentos de igual intensidad $M = F \cdot l$ por su signo de acuerdo al sentido de giro que provocan.

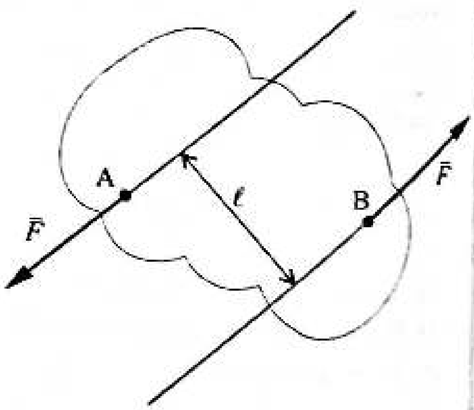


Fig. E3a

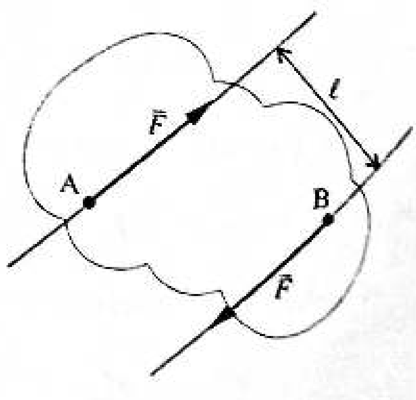


Fig. E3b

- Entonces los efectos de una cupla están definidos por la intensidad y el signo de su momento, de modo que, por ejemplo, una cupla de momento $F \cdot l$ es equivalente a otra cupla de momento $F' \cdot l'$, con $F' = F/K$ y $l' = K \cdot l$, siendo K cualquier número, de modo que $F' \cdot l' = F \cdot l$ siempre que los dos momentos sean de igual signo.
- Así es.
- Hasta luego.

Sigamos dialogando:

- ¿Y qué podemos decir de las rectas de acción de las fuerzas que componen la cupla?
Por ejemplo en la Fig. 4a y en la Fig. 4b, tenemos cuplas de igual intensidad y signo, es decir, en ambos casos $M = F \cdot d$, pero están aplicadas a puntos distintos y sus rectas de acción (paralelas para fuerzas de la misma cupla) son también distintas. ¿Son equivalentes o no?
- ¿Cuándo son equivalentes dos sistemas de fuerzas?
- Cuando aplicadas al mismo cuerpo rígido producen los mismos efectos.
- Y ¿cuál es el efecto de una cupla sobre un cuerpo rígido?
- Producir una aceleración angular.
- Bien. Imaginemos, por ejemplo que el punto **O** del cuerpo esté fijo, de modo que el único movimiento posible sea de rotación alrededor de él. Como el momento de un cupla no depende de la elección del centro de momentos:

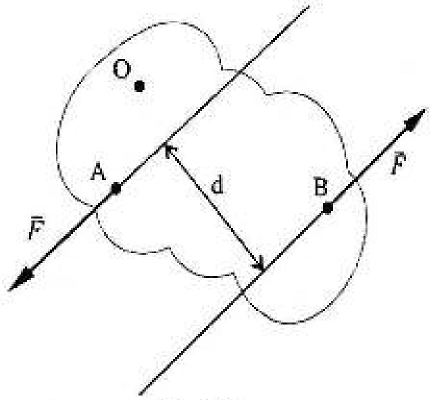


Fig. E4a

$$\text{Caso (a)} \quad \Rightarrow \quad M_O = F \cdot d$$
$$\text{Caso (b)} \quad \Rightarrow \quad M_O = F \cdot d$$

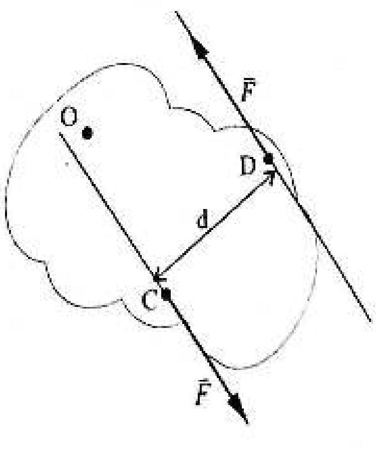


Fig. E4b

Si observáramos únicamente el giro del cuerpo alrededor de O y no supiéramos cuál es el sistema de fuerzas aplicado. ¿Cuál de los dos casos elegiríamos como sistema real que causa el efecto?
- No parece haber posibilidad de distinción...
- **No. No la hay**. Para cuerpos rígidos, los dos sistemas son indistinguibles. Producen iguales efectos.

De una cupla sólo podemos conocer -y eso nos basta para el análisis- su momento (con intensidad y signo). Cuál sea la dirección de las rectas de acción de sus fuerzas y en que puntos del cuerpo se hallen aplicadas es irrelevante, ya que estas características no varían sus efectos.

Todas las cuplas que podamos imaginar con igual momento son entonces equivalentes.

2.4 - Condiciones de equilibrio del cuerpo rígido

Estamos ahora en condiciones de establecer condiciones generales para el equilibrio de un cuerpo rígido bajo la acción de un sistema de fuerzas.

El equilibrio del cuerpo rígido implica simultáneamente:

a) Que la suma (vectorial) de todas las fuerzas aplicadas al cuerpo sea nula. Esta condición ya la encontramos en la estática del cuerpo puntual.

b) Que la suma (algebraica) de los momentos de todas las fuerzas aplicadas al cuerpo *respecto de un punto* cualquiera sea nula.

Estas dos condiciones son necesarias y suficientes para el equilibrio del cuerpo rígido. Son *necesarias* porque si no se cumplen no hay equilibrio y son *suficientes* porque su cumplimiento asegura el equilibrio. Desde el punto de vista matemático, el equilibrio del cuerpo rígido está definido por las ecuaciones

$$\vec{f} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \end{cases} \qquad M_O = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} M_{O,\vec{F}_i} = 0$$

Donde los ejes x e y son cualesquiera y se eligen de acuerdo a la conveniencia matemática de simplificar los cálculos y el centro de momentos **O** es también arbitrario. Observe que se trata de tres ecuaciones, lo que lleva a pensar que el problema debería tener tres incógnitas. Hablaremos más de esto en una sección posterior.

Veamos como operar con estas ecuaciones en algunos ejemplos:

Una barra de longitud l y peso $\vec{P}$ se halla en equilibrio bajo la acción de dos fuerzas indicadas en la Fig. E5a. Determinar $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$.

Antes de plantear ecuaciones analicemos cualitativamente la situación, lo que siempre es conveniente porque muchas veces permite simplificar la solución matemática y evitar posibles errores que surjan de la aplicación ciega de las ecuaciones.

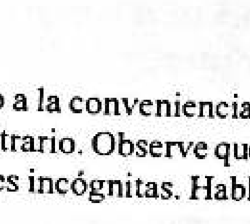


Fig. E5a

Convencionalmente, situamos la fuerza peso vertical, hacia abajo y (según justificaremos más adelante) en el centro de la barra. Intuitivamente, las fuerzas aplicadas sobre los extremos deben "apuntar" hacia arriba para contrarrestar la acción del peso, como se indica en la figura, y debido a la simetría de la disposición deberían ser iguales y entonces cada una tendría una intensidad $P/2$.

Veamos qué resultado tenemos aplicando las condiciones de equilibrio. Para ello necesitamos definir un sistema de ejes y un centro de momentos. Como trataremos con fuerzas verticales nos conviene, para simplificar el cálculo de las proyecciones, usar un eje vertical y uno horizontal.

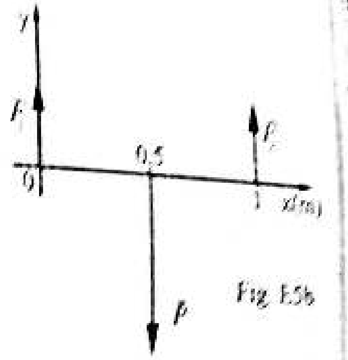


Fig. E5b

Tomemos el origen de coordenadas **O** como centro de momentos. Como el momento de una fuerza respecto a un punto es proporcional a la distancia de la recta de acción de la fuerza al punto, nos conviene tomar el centro de momentos, que puede ser cualquier punto, sobre la recta de acción de una de las fuerzas del sistema, con lo que simplificamos el cálculo. Tomamos entonces, por ejemplo **O** en el extremo izquierdo de la barra.

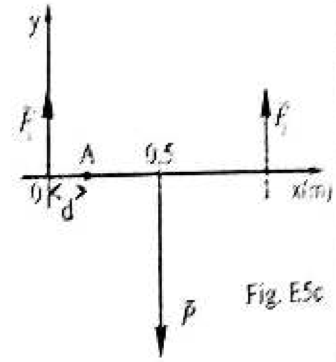


Fig. E5c

Planteamos ahora las condiciones de equilibrio:

$$\vec{f} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \end{cases} \qquad M_O = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} M_{O,F_i} = 0$$

$\sum_{i=1}^{3} F_{ix} = 0$ Es inmediata, ya que no hay proyecciones de fuerzas del sistema sobre el eje x.

$$\sum_{i=1}^{3} F_{iy} = F_1 + F_2 - P = 0 \Rightarrow \boxed{F_1 + F_2 = P} \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{3} M_{O_i} = 0 - P\left(\frac{l}{2}\right) + F_2\, l = 0 \qquad (2)$$

Observe los signos de los momentos. $M_{F1} = 0$ por la selección del centro de momentos.

Luego de la Ec. (2) despejamos F_2: $F_2\, l = P\, \dfrac{l}{2} \Rightarrow \boxed{F_2 = \dfrac{P}{2}}$ (3)

Y despejando F_1 de la Ec. (1) y reemplazando F_2 de la Ec. (3) resulta:

$$F_1 = P - F_2 \Rightarrow F_1 = P - \frac{P}{2} \Rightarrow \boxed{F_1 = \frac{P}{2}} \qquad (4)$$

De la Ec (3) y de la Ec. (4) resulta: $F_1 = F_2 = P/2$ que es el mismo resultado al que habíamos llegado con nuestro análisis intuitivo. Pruebe repetir el cálculo eligiendo otro centro de momentos, por ejemplo el punto **A** que está a una distancia d de **O**.

Todo esto está muy bien, pero aquí partimos conociendo el sentido de las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ porque el análisis intuitivo previo es simple en este caso. Pero habrá otros casos más complejos donde

ese sentido no puede definirse previamente en forma simple. ¿Cómo se procede en tales casos?
- Bien. Supongamos que sólo conocemos la dirección (vertical) de $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ pero no su sentido.

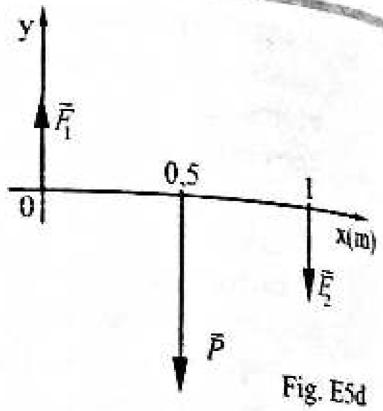


Fig. E5d

Como en nuestra ignorancia ambos sentidos son igualmente posibles, elijamos *arbitrariamente* uno hacia arriba y otro hacia abajo, como se indica en la figura, y repitamos el cálculo:

$\sum_{i=1}^{3} F_{ix} = 0$ como antes, esta ecuación no nos aporta información.

$$\sum_{i=1}^{3} F_{iy} = F_1 - F_2 - P = 0 \Rightarrow \boxed{F_1 - F_2 = P}$$

Observemos que en esta ecuación las cantidades F_1 y F_2 son positivas. El signo de las proyecciones ya se ha tenido en cuenta.

$$\sum_{i=1}^{3} M_{Oi} = 0 - P\left(\frac{l}{2}\right) - F_2 l = 0 \Rightarrow \boxed{F_2 = -\frac{P}{2}}$$

Y aquí ha saltado la liebre. Observe que F_2 es negativa, ya que P es positivo y nuestra suposición original, F_2 positiva con sentido hacia abajo era falsa. Por lo tanto F_2 debe "apuntar" hacia arriba.

2.5 - Cables y Barras. Vínculos

Hemos visto en el tratamiento cuerpos puntuales que un cable (o hilo, o soga, o cuerda) establecía un vínculo al restringir sus movimientos posibles. Un cable actúa de vínculo únicamente cuando está tenso, y su dirección es de tracción, o sea de "tirar" desde sus extremos.

No se puede "empujar" objetos con un cable. La situación del primer dibujo de la Fig. 4 es impensable porque el cable no es estrictamente un cuerpo rígido. Sin embargo, si se lo reemplaza por una barra, supuestamente rígida, el "empuje" es posible. La barra actúa nuevamente como "transmisor" de fuerzas entre sus extremos.

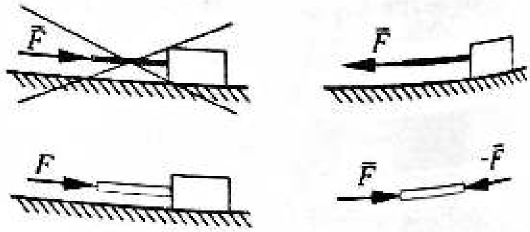


Fig. 4

El bloque se acelera a la derecha bajo la acción de $\vec{F}$. Por la tercera ley, la barra recibe del bloque una reacción ($-\vec{F}$). Observe el sistema de fuerzas que actúan sobre la barra, cuyo efecto es comprimirla. Si el punto de contacto entre barra y bloque, y en tal caso el sistema de fuerzas sobre ella es similar al caso del cable, son fuerzas que la estiran, la traccionan. Por su rigidez, entonces, la barra admite esfuerzos de tracción o compresión. El cable, únicamente esfuerzos de tracción. En ambos casos, los esfuerzos se "transmiten" solamente a lo largo, hasta este momento de nuestro análisis.

Podemos entonces resumir estas propiedades de barras y cables en la siguiente figura; note que las barras en cuestión están articuladas, es decir, presentan un pivote alrededor del cual pueden girar.

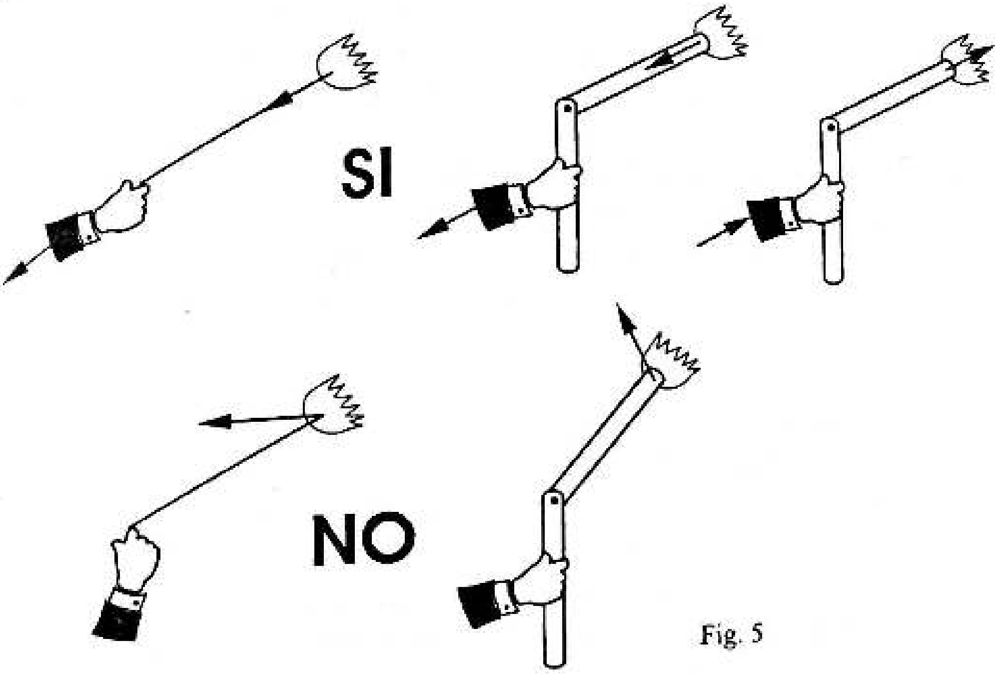


Fig. 5

Sin embargo, la condición de rigidez de las barras nos da más posibilidades, como por ejemplo:

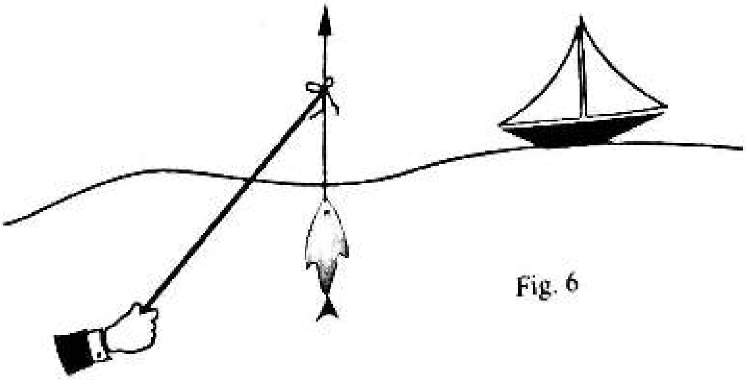


Fig. 6

Pero observe que en este caso la caña no es una barra articulada, sino que está unida (más o menos) rígidamente a la mano. Decimos que está "empotrada" en la mano.

Si se reemplaza este empotramiento con una articulación, otra vez sólo es posible tirar o empujar.

Pero determinar las posibilidades de movimiento es conveniente clasificar de alguna forma los tipos de vínculos entre cuerpos rígidos.

Note que la barra es un tipo particular de cuerpo rígido, en principio, cualquier cuerpo rígido se comporta como una barra.

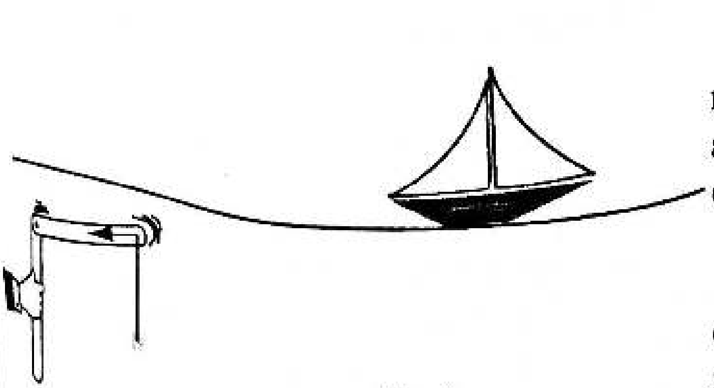


Fig. 7

Bajo la acción de un sistema de fuerzas plano, un cuerpo rígido plano y obligado a permanecer en su plano, tiene únicamente tres posibilidades de movimiento independientes: dos traslaciones sobre direcciones perpendiculares en el plano y el giro alrededor de un punto del plano. Cualquier movimiento del cuerpo sobre el plano puede pensarse como una combinación de estas tres posibilidades.

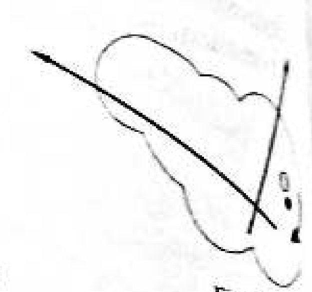


Fig. 8

Recordemos que las ecuaciones que surgían de las condiciones de equilibrio eran también tres: la sumatoria de las componentes escaleres según ejes perpendiculares nula -condición ligada al equilibrio de traslación- y la suma de los momentos de las fuerzas respecto de cualquier punto del plano nulo - condición de equilibrio de rotación.

Cada una de las tres posibilidades de movimiento del cuerpo rígido se denomina grado de *libertad*. Decimos entonces que, *en el plano*, un cuerpo rígido tiene ***tres grados de libertad***. La condición de equilibrio restringe, entonces, un grado de libertad del cuerpo.

En la práctica, para restringir las posibilidades de movimiento de un cuerpo rígido, es necesario unirlo a otros cuerpos rígidos por medio de dispositivos que llamamos *vínculos*. Las fuerzas y momentos que estos dispositivos aplican al cuerpo rígido se llaman *fuerzas o pares de vínculo*. Podemos clasificar los vínculos de acuerdo al número de grados de libertad que restringen en el posible movimiento del cuerpo rígido.

Así, el caso más simple es el de *apoyo o apoyo móvil*, que restringe únicamente un grado de libertad: el movimiento en la dirección perpendicular al apoyo (en la figura, traslación según la dirección vertical). La fuerza de vínculo $\vec{F}_V$ es una fuerza en esa dirección, que anula toda otra posible fuerza aplicada al cuerpo cuyo efecto sea tender a trasladarlo en esa dirección.

Otro caso es el vínculo llamado *articulación o apoyo fijo*. Se trata de un pivote que permite al cuerpo rotar alrededor de él pero no trasladarse. Se restringen así dos grados de libertad y queda únicamente la posibilidad de giro. La fuerza de vínculo es una fuerza de cualquier dirección, cuyas componentes sobre dos direcciones perpendiculares anulan las posibles fuerzas aplicadas sobre el cuerpo que tienden a trasladarlo en esas direcciones.

Finalmente, tenemos el vínculo llamado *empotramiento*. Consiste en una unión rígida que restringe los tres grados de libertad del cuerpo. Un cuerpo rígido empotrado no puede moverse. La acción del vínculo en este caso es una fuerza de cualquier dirección, que anula la posibilidad de traslación, y un momento *(momento de empotramiento)* que anula la posibilidad de rotación.

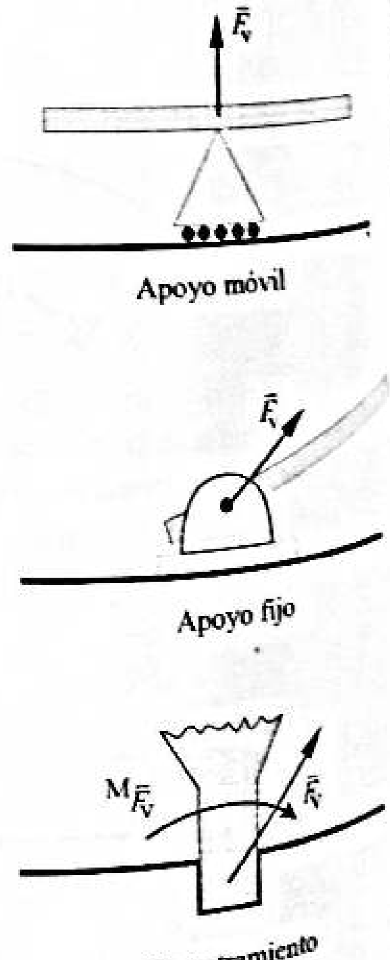


Fig. 9

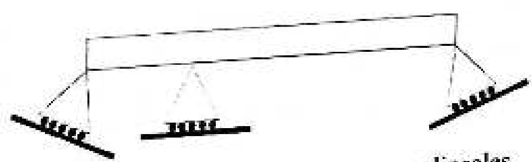
Desde el punto de vista del equilibrio del cuerpo rígido, las acciones de vínculo pueden pensarse como fuerzas equilibrantes del sistema aplicado. Por ejemplo:

- En el *apoyo* (móvil) la fuerza de vínculo equilibra a la componente de la resultante sobre la dirección del apoyo.
- En la *articulación* la fuerza de vínculo es la equilibrante del sistema de fuerzas aplicadas.
- En el *empotramiento* la fuerza de vínculo y el momento de empotramiento equilibran al sistema de fuerzas aplicadas.

Podemos aplicar varios vínculos de distinto tipo para lograr un cuerpo rígido en equilibrio bajo diversas solicitaciones externas. Pero puede suceder que el número de grados de libertad que estos vínculos restringen sea menor, igual o mayor que tres, el número de grados de libertad del cuerpo rígido *en el plano*. Observemos que para la determinación de las acciones de vínculos disponemos de tres ecuaciones (las condiciones de equilibrio) y un número menor o mayor de incógnitas nos creará dificultades matemáticas.

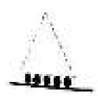
De acuerdo al número de grados de libertad no restringidos, los cuerpos rígidos vinculados se clasifican de la siguiente manera:

Isostáticos: hay tres grados de libertad restringidos. El cuerpo no puede moverse y hay tantas ecuaciones como incógnitas. En este curso trataremos exclusivamente con sistemas isostáticos. Como ejemplos, supongamos una barra apoyada sobre tres apoyos (móviles), o la misma barra apoyada en un punto y articulada en un extremo.

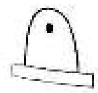


Los tres apoyos no pueden ser colineales

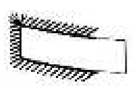
Note los símbolos que utilizaremos para diferenciar los tres tipos de vínculos:



Apoyo móvil.



Apoyo fijo o articulación.



Empotramiento.

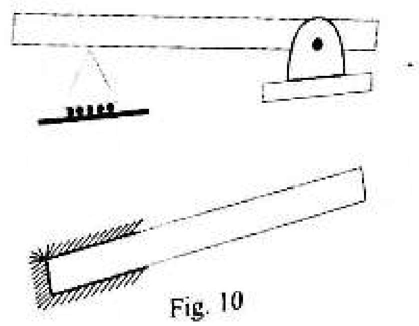


Fig. 10

Hipostáticos: hay grados de libertad no restringidos. El sistema alcanza el equilibrio en forma condicionada, es decir, hay un conjunto restringido de sistemas de fuerzas aplicadas para los cuales se logra el equilibrio. Por ejemplo considere una barra horizontal apoyada en dos puntos. Si se aplica una fuerza horizontal la barra se acelera en la dirección de la fuerza y los apoyos no pueden equilibrar esa acción. Otro ejemplo: una barra pivoteada o articulada en un extremo. La barra puede acelerarse alrededor del extremo fijo y lo hará a causa de su propio peso.

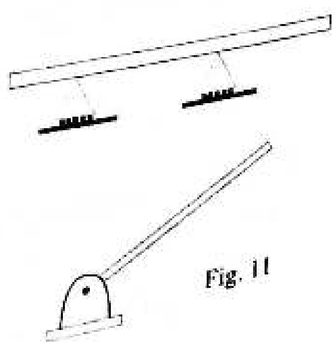


Fig. 11

Hiperestáticos: hay más restricciones que grados de libertad. El sistema se hallará en equilibrio pero son necesarias técnicas especiales fuera del alcance de este curso, para determinar las acciones de vínculo. La mayoría de las construcciones de la ingeniería son sistemas hiperestáticos. Una mesa común es un ejemplo. La mesa apoya en las cuatro patas. Hay cuatro apoyos móviles. Uno parecería redundante, pero, pruebe quitar una pata...

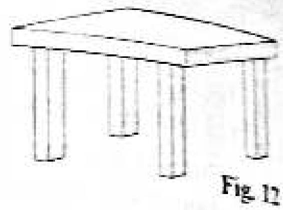


Fig. 12

Como hemos dicho en este curso trataremos únicamente con sistemas isostáticos. Veremos a continuación algunos ejemplos a fin de aclarar ideas.

Una barra de 80 cm de longitud y 30 kgf de peso se halla articulada en un extremo. a) Hallar el valor de la fuerza que hay que aplicar en el otro extremo que permite el equilibrio sí:

1) su dirección es vertical.

2) su dirección es horizontal,

para mantener a la barra inclinada en $\alpha = 60°$ como se indica en la Fig.E6a.
b) En ambos casos determine la fuerza de vínculo en el punto **A**.

La articulación en **A** sólo permite que la barra gire alrededor de ese punto. La fuerza de vínculo equilibra a la suma vectorial del sistema de fuerzas aplicadas $\vec{F}$ y $\vec{P}$. Para equilibrar el momento de rotación alrededor de **A** producido por el peso, se coloca la fuerza $\vec{F}$. Su dirección es dato del problema, por lo que sólo es necesario hallar su intensidad y sentido. Como el grado de libertad a restringir es la posible rotación alrededor de **A**, para determinar $\vec{F}$ basta con la condición de equilibrio de momentos respecto de **A**. Observe que con esta elección del centro de momentos no necesitamos, para ese cálculo, conocer la fuerza de vínculo en **A** ya que su momento se anula.

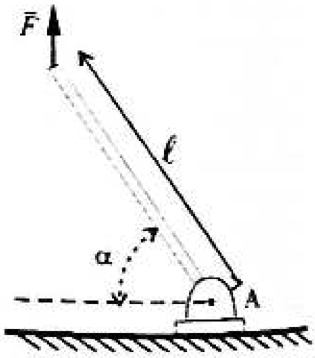


Fig. E6a

Analicemos los dos casos por separado:

a.1) ***F*** **vertical**

De la figura se observe que las distancias desde **A** a las rectas de acción de las fuerzas son:

$d_F = l\ \cos\alpha \qquad d_P = \text{dF}/2$

Ya que el peso se halla en el centro geométrico de la barra.
Luego:

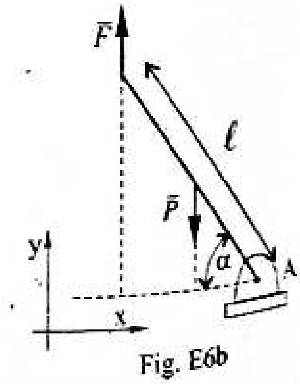


Fig. E6b

$$\sum_{i=1}^{2} M_{Ai} = -F\,d_F + P\,d_P = 0 \ \Rightarrow P(d_F/2) - F\ d_F = 0$$

y se tiene: $F = P/2 = 15$ kgf y sentido hacia arriba. Observe que no importa la longitud de la barra ni su inclinación, porque P y F son paralelas y las distancias al centro de rotación cumplirán siempre la relación $d_F = 2\, d_P$.

b.1) Para calcular ahora la fuerza de vínculo en **A** planteamos las condiciones de equilibrio:

$$\sum_{i=1}^{3} F_{ix} = 0 \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{3} F_{iy} = 0$$

Observe que el sistema de fuerzas $\vec{F}$ y $\vec{P}$ aplicadas no tiene componente horizontal. Por lo tanto tampoco la tendrá la fuerza de vínculo en A.

$\sum F_{iy} = F - P + F_{Ay} = 0$ (suponemos que F_{Ay} tiene sentido positivo arbitrariamente).

Luego: $F_{Ay} = P - F = P/2 = 15\ kgf$

Y el signo positivo del resultado nos indica que la suposición del sentido de F_{Ay} era correcta. Finalmente:

$$\boxed{\vec{F} = 15\ kgf\ \check{j} \quad \text{y} \quad \vec{F}_{Ay} = 15\ kgf\ \check{j}}$$

a.2) F horizontal

Intuitivamente $\vec{F}$ debe estar dirigida hacia la derecha para contrarrestar la tendencia al giro causada por el peso. Las distancias desde A a las rectas de acción de las fuerzas son ahora:

$d_F = l\ sen\ \alpha \qquad\qquad d_P = (l/2)\cos\alpha$

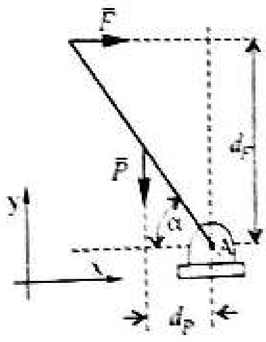


Fig. Eoc

Y de la condición de equilibrio de rotación resulta:

$$\sum M_{A} = P\,d_P - F\,d_F = 0 \Rightarrow P(l/2)\cos\alpha - F\,l\,sen\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{F = P/(2\,tg\alpha)}$$

Con $P = 30$ kgf y $\alpha = 60°$ tenemos $\boxed{F \approx 8{,}66\ \text{kgf}}$ hacia la derecha, como habíamos supuesto.

b.2) La fuerza de vínculo tiene ahora componentes horizontal y vertical, porque las tiene la suma vectorial de fuerzas del sistema $\vec{F}$ y $\vec{P}$. Es también "intuitivo" que F_{Ax} tenga sentido hacia la izquierda, para equilibrar a $\vec{F}$ y F_{Ay} hacia arriba para equilibrar a $\vec{P}$. En realidad, sin necesidad de seguir todo el formalismo de las ecuaciones, podemos escribir:

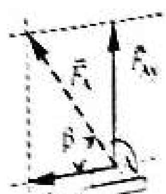


Fig. Eod

$$F_{Ax} = -F \quad \Rightarrow \quad F_{Ax} \approx -8{,}66\ kgf$$
$$F_{Ay} = P \quad \Rightarrow \quad F_{Ay} = 30\ kgf$$

De donde se obtiene:

$$\boxed{F_A = 31{,}225\ \text{kgf} \quad \text{y} \quad \beta = 73°\ 54'}$$

Observe que la dirección de $\vec{F}_A$ no coincide con la dirección de la barra, y en general, no hay razón para que lo haga cuando el vínculo es una articulación.

Determinar la acción de vínculo en el soporte del mástil. El mástil mide 1,8 m y pesa 10 kgf. La bandera pesa 1 kgf y considerar que la recta de acción de su peso pasa por el extremo del mástil.

El mástil se encuentra empotrado al soporte. La acción de vínculo consiste en una fuerza vertical $\vec{F}_V$ (porque la resultante del sistema de fuerzas aplicadas $\left(\vec{P}_b + \vec{P}_m\right)$ no tiene componente en la dirección horizontal) y hacia arriba, y un momento de empotramiento de sentido antihorario. Los sentidos de $\vec{F}_V$ y $M_{\vec{F}_V}$ resultan de su condición de equilibrantes del sistema aplicado. Las condiciones de equilibrio nos llevan a:

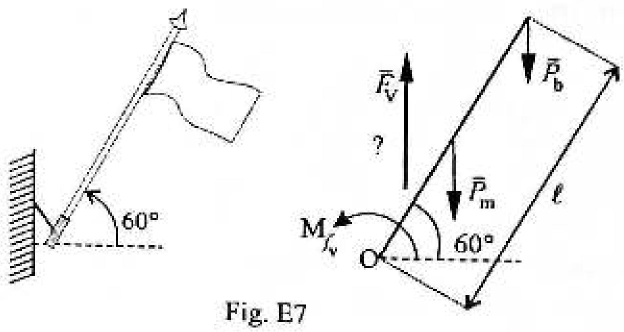


Fig. E7

$$\boxed{F_V = P_b + P_m = 11\ kgf}$$

$$\sum M_{Oi} = 0 \ \Rightarrow \ M_{\vec{F}_V} - P_m (l/2)\cos 60° - P_b\, l \cos 60° = 0$$

$$M_{\vec{F}_V} = (P_b + P_m/2)\, l \cos 60°$$

$$\boxed{M_{\vec{F}_V} = 5,4\ kgf\ \ m}$$

2.6 - Centro de gravedad y centro de masa

Hasta el momento, al hablar del peso de un cuerpo extenso lo hemos supuesto como una única fuerza ubicada en un único punto, que suponíamos en el centro geométrico del cuerpo, como si la Tierra realizara una única fuerza de atracción gravitatoria sobre él.

En realidad, un cuerpo extenso lo podemos considerar formado por un conjunto de partículas y la Tierra atrae a cada una de ellas a través de la interacción gravitatoria. Tenemos entonces que el cuerpo está sometido a la acción de un gran número de pequeñas fuerzas elementales, y es la resultante de este sistema de fuerzas lo que llamamos peso. Podemos medir la intensidad de esta resultante-peso colgando el cuerpo de un dinamómetro y observando la lectura en la escala. Su dirección y sentido serán hacia el centro de la Tierra y nos queda determinar su punto de aplicación para definirla por completo.

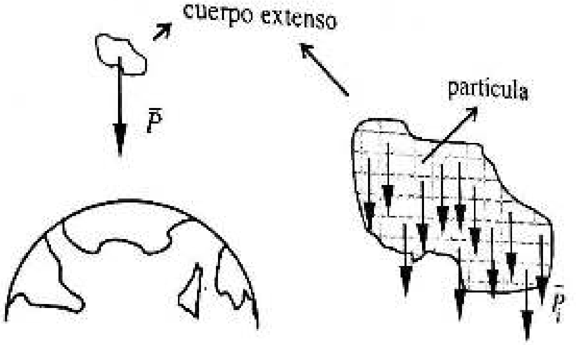


Fig. 13

Para determinarlo podemos colgar el cuerpo de distintos puntos y observar la recta de acción resultante de la resultante-peso en cada caso. Observamos que todas esas rectas de acción se cruzan en un único punto cualquiera sea la posición del cuerpo. Ese punto es entonces el punto de aplicación del peso y se conoce como *centro de gravedad del cuerpo*.

Cada vez que lo colgamos, el cuerpo se dispondrá en la posición para la cual la fuerza que ejerce la soga y el peso se hallen en la misma recta de acción, para lograr el equilibrio.

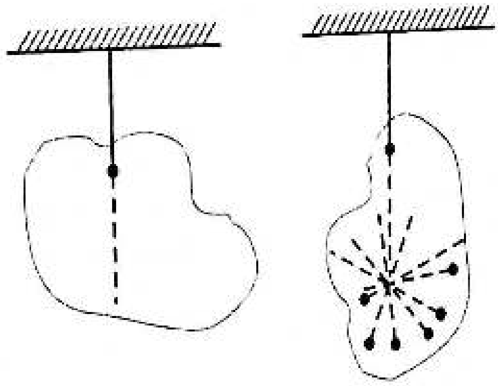


Fig. 14

Generalmente los objetos de interés práctico son de tamaño muy pequeño frente al tamaño terrestre, de modo que las fuerzas elementales de atracción gravitatoria sobre las partículas del objeto son paralelas y de igual valor (para partículas idénticas) dentro de un margen de error despreciable. En tal caso la experiencia de colgar el cuerpo de distintos puntos permite hallar el centro de gravedad.

Sin embargo, si las dimensiones del objeto son tales que las fuerzas de atracción gravitatoria (que dependen del cuadrado de la distancia al centro terrestre) elementales *no* son iguales, el centro de gravedad cambiará de punto con la posición del cuerpo y para cada posición habrá, generalmente, un centro de gravedad distinto.

Por ejemplo, ver Fig. 15, sea una barra rígida de masa despreciable y de enorme longitud, en la que desde los extremos se sujentan dos esferas. Si tenemos en cuenta que la atracción gravitatoria disminuye con el cuadrado de la distancia, en el caso (a) el sistema peso puede equilibrarse con una fuerza aplicada en **A**, porque las esferas están equidistantes del centro de la Tierra y las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ son simétricas y de igual intensidad.

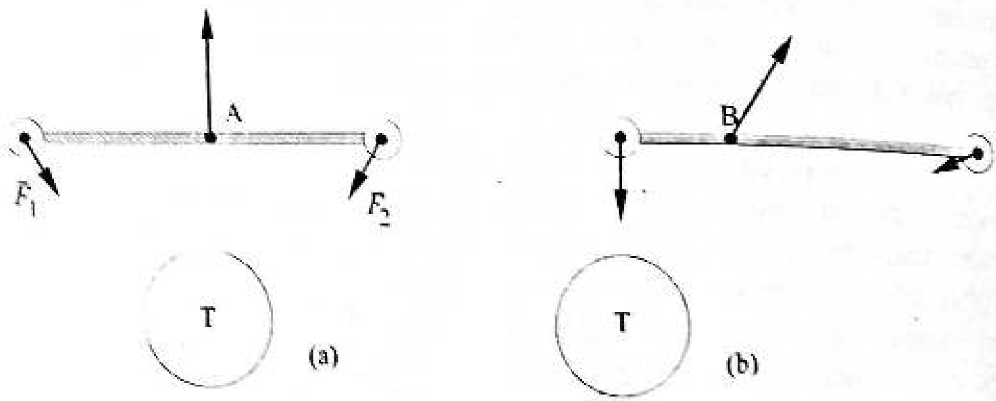


Fig. 15

En cambio, el mismo cuerpo colocado en la posición representada en **(b)** sólo puede equilibrarse -si se desea hacerlo con una fuerza única- aplicando una fuerza en **B**. ¡Se ha desplazado el centro de gravedad!

En adelante, cuando hablemos de centro de gravedad, será para cuerpos de pequeña extensión frente al tamaño terrestre, lo que, por otra parte, es lo usual.

¿Cómo determinar el centro de gravedad de un cuerpo extenso? Si el cuerpo tiene forma irregular, la única manera simple de hacerlo es colgando al cuerpo desde dos puntos distintos y marcar el punto de cruce de las líneas de plomada obtenidas, o sea, las líneas formadas por la cuerda de la cual se cuelga al cuerpo al quedar en equilibrio. Cuando el cuerpo tiene una forma geométrica regular es más preciso usar un método matemático, dado que el método experimental es bastante grosero.

En este caso, el cuerpo tiene un *centro geométrico* o centro de simetría, de forma tal que si $\vec{r}$ es la posición de una partícula del cuerpo respecto de ese centro, existe otra partícula en la posición $-\vec{r}$, y podemos agrupar las partículas de a pares alrededor del centro geométrico para constituir el cuerpo.

También podemos hacer esto para sumar las fuerzas pesos elementales sobre cada partícula. Para un par de partículas simétricas respecto del centro geométrico **O**, la resultante $\vec{f}' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ pasa por **O** (compruébelo tomando momentos respecto de **A**, por ejemplo, y usando la relación de equivalencia entre $\vec{f}'$ y las fuerzas 1 y 2: $M_{A\vec{f}'} = M_{A(\vec{F}_1+\vec{F}_2)}$) y repitiendo este procedimiento para cada par de partículas que forma el cuerpo todas las resultantes parciales pasan por **O**.

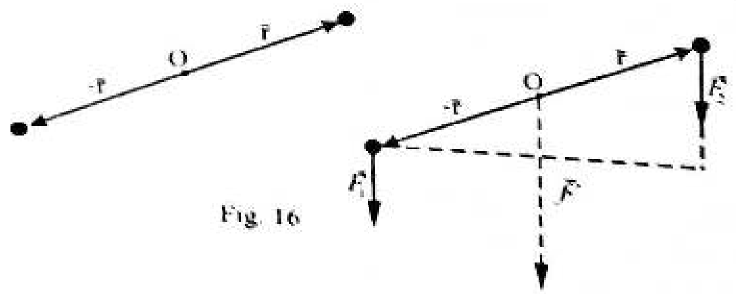


Fig. 16

Resulta entonces que el peso del cuerpo en su conjunto pasa por el centro geométrico, que es entonces *centro de gravedad*.

En esta formulación estamos suponiendo tácitamente que todas las partículas apareadas son idénticas (es decir $F_1 = F_2$) lo que en la descripción global se traduce diciendo que el cuerpo es homogéneo o de densidad uniforme.

Determinemos la posición del centro de gravedad del cuerpo de la Fig. E8a, de espesor y densidad uniformes. Este cuerpo no es un cuerpo geométrico regular, pero podemos dividirlo en sectores que sí lo son, como por ejemplo los dos paralelepípedos de la figura (hay otras divisiones posibles, todas equivalentes para la obtención del centro de gravedad, pruebe buscarlas).

Razonemos que si hallamos el centro de gravedad sumando las fuerzas gravitatorias elementales sobre cada partícula del cuerpo, podemos hallarlo también sumando resultantes parciales, como harían los pesos de cada paralelepípedo.

Cada paralelepípedo es además un cuerpo geométrico regular, y siendo homogéneos, el centro de gravedad coincide con el centro geométrico que es el punto de intersección de sus diagonales. Como el espesor es uniforme, ambos centros $\mathbf{O_1}$ y $\mathbf{O_2}$ se encuentran sobre un plano vertical que corta por la mitad al cuerpo y es paralelo a la cara frontal. Dibujamos en este plano un par de ejes *(x,y)*; con origen en el punto **A** del cuerpo y ubicamos los centros $\mathbf{O_1}$ y $\mathbf{O_2}$ como se indica en la figura. Nuestro siguiente paso será sumar los pesos parciales $\vec{P}_1$ y $\vec{P}_2$ para hallar la posición del centro de gravedad **O** del cuerpo completo. Este punto se hallará sobre la recta $\mathbf{O_1O_2}$, y su coordenada x dependerá de la relación entre las intensidades $\vec{P}_1$ y $\vec{P}_2$, que no son iguales porque los volúmenes de ambos paralelepípedos no lo son. Si δ es la densidad, uniforme, del cuerpo,

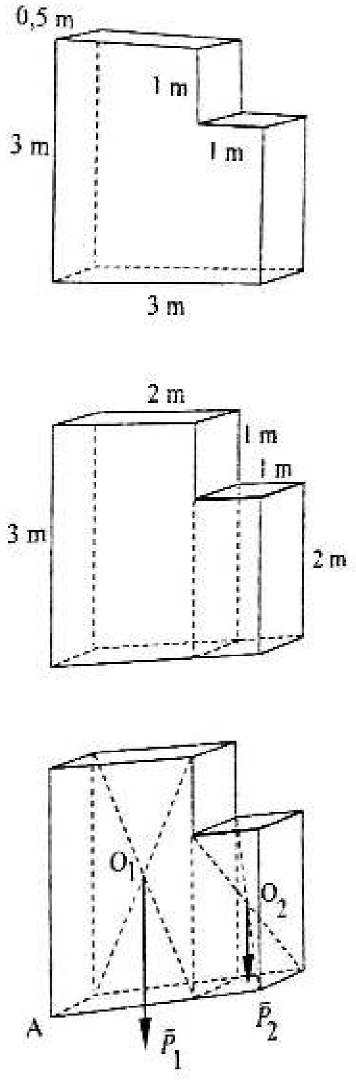


Fig. E8a

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = m_1 g = \delta V_1 g \\ P_2 = m_2 g = \delta V_2 g \end{array}\right. \Rightarrow P_1 / P_2 = V_1 / V_2$$

Pero:

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = 2m \cdot 3m \cdot 0{,}5m = 3m^3 \\ V_2 = 1m \cdot 2m \cdot 0{,}5m = 1m^3 \end{array}\right\} \Rightarrow P_1 / P_2 = 3$$

$$\boxed{P_1 = 3P_2}$$

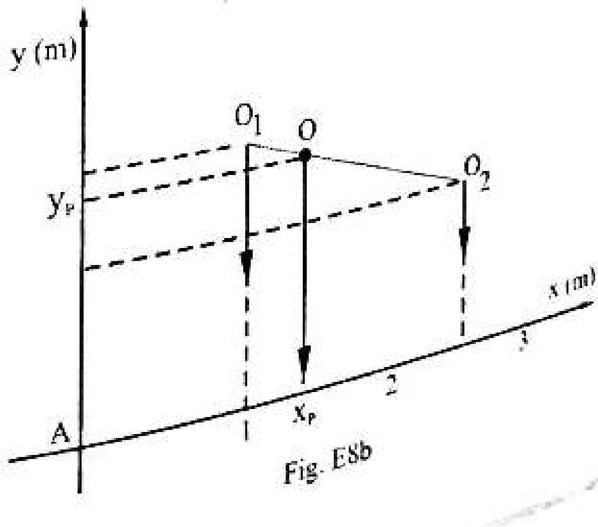


Fig. E8b

Tomando momentos respecto de **A** y planteando la equivalencia del sistema $\vec{P}_1$ y $\vec{P}_2$ y el sistema $\vec{P}$:

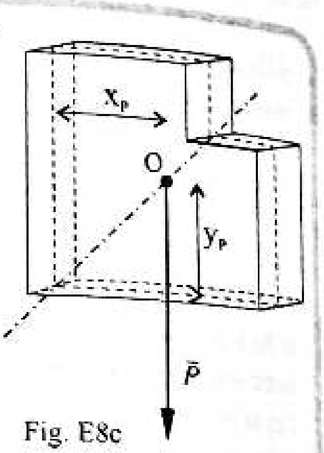


Fig. E8c

$$P \, . \, x_P = P_1 \, . \, x_1 + P_2 \, . \, x_2 \quad \Rightarrow \quad x_P = \frac{P_1 . x_1 + P_2 . x_2}{P_1 + P_2} = \frac{P_2 . (3x_1 + x_2)}{4P_2}$$

$$\boxed{x_P = \frac{3x_1 + x_2}{4}}$$

Con $x_1 = 1$ m y $x_2 = 2{,}5$ m; tenemos: $\boxed{x_P \ = \ 1{,}375 \text{ m}}$

La ordenada y_P del centro de gravedad se puede obtener a partir de la ecuación de la recta que pasa por $\mathbf{O_1}$ y $\mathbf{O_2}$, o más simplemente observando que en los triángulos semejantes $\mathbf{O_1PO_2}$ y $\mathbf{OQO_2}$ de la figura se cumple que

$$O_1P/OQ = PO_2/QO_2$$

y entonces:

$$OQ = (O_1P \ / \ PO_2) \ QO_2$$

Pero

$OQ \ = \ y_P$ -1 m; $PO_2 = 1{,}5$ m;
$O_1P = 0{,}5$ m; $QO_2 = 2{,}5$ m - $x_P = 1{,}125$ m

Luego: $y_P = [(0{,}5/1{,}5) \ 1{,}125 \text{ m} + 1\text{m}]$

$$\boxed{y_P = 1{,}375 \text{m}}$$

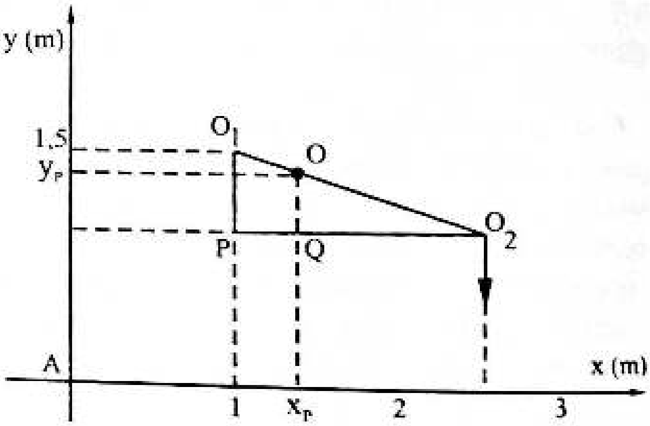


Fig. E8d

Y el centro de gravedad se encuentra sobre el eje dibujado en la Fig. E8c, que como puede sospechar, es el eje de simetría del cuerpo.

El centro de gravedad no necesariamente se encuentra en un punto interior al cuerpo, como se ejemplifica en el caso de la escuadra de la Fig. 17. Además del centro de gravedad es frecuente hablar del centro de masa.

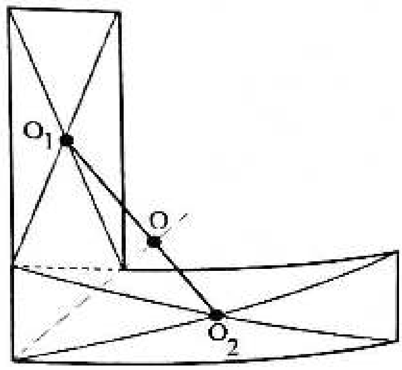


Fig. 17

El centro de masa de un cuerpo rígido es aquel punto que, cuando el cuerpo se encuentra sin fuerzas aplicadas, permanece en reposo o se mueve con movimiento rectilíneo uniforme.
Note que no hablamos para nada del tamaño del objeto. La ubicación del centro de masa depende de la distribución de masa en el volumen del cuerpo, y bajo la acción de cualquier sistema de fuerzas aplicadas, si el cuerpo fuera rígido, el centro de masa es siempre el mismo. Sabemos que esto no ocurre en cuerpos muy extensos, con el centro de gravedad por la variación de la intensidad de la atracción gravitatoria con la distancia de las diversas partículas del cuerpo al centro de atracción.
Salvo expresa indicación en contrario para objetos de gran tamaño, asumiremos que centro de gravedad y centro de masa son uno y el mismo punto para un cuerpo.

Tomemos un cartón rectangular alargado y determinamos su centro de gravedad, le marcamos ese punto con un círculo negro, y también otro punto en un extremo por medio de una cruz como se observa en la Fig. 18.

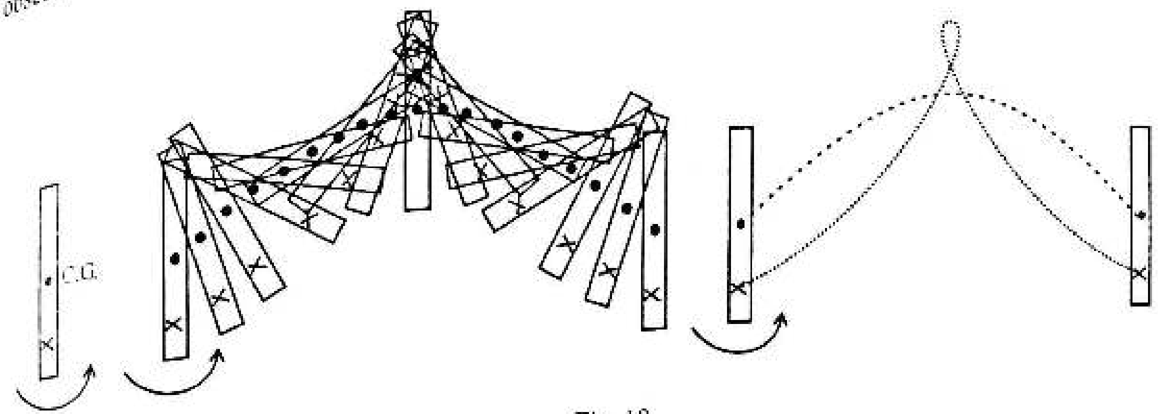


Fig. 18

Si arrojamos al aire ese cartón de modo tal que globalmente describe una trayectoria curva pero que a la vez esté animado de un movimiento de giro sobre sí mismo, observamos que el punto correspondiente al centro de gravedad, que coincide con el centro de masa, describe una trayectoria parabólica. El otro punto del extremo describirán una trayectoria más compleja, y será difícil verla, si el giro es muy veloz.

2.7 - Algunas máquinas simples

Las máquinas simples son dispositivos (algunos muy antiguos) usados para multiplicar los efectos de la fuerza humana, con el fin de levantar o mover objetos pesados.

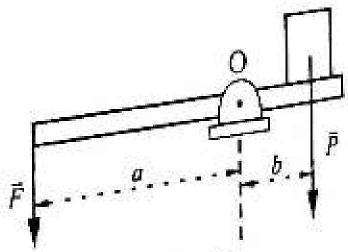


Fig. 19

Palancas: Se trata de una barra rígida que rota sobre uno de sus puntos (**O**). Si colocamos un peso $\vec{P}$ en un extremo, para equilibrarlo habrá que realizar una fuerza $\vec{F}$ en el otro extremo. Suponiendo $\vec{F}$ vertical, la condición de equilibrio es que la barra no gire alrededor de **O**, de modo que

$$\sum M_{Oi} = 0 \Rightarrow F.\,a - P.\,b = 0 \Rightarrow F = (b/a).P$$

La fuerza de vínculo $\vec{F}_V$ en O es también vertical y hacia arriba y su intensidad reemplazando F es:

$$F_V = F + P = P\,(1 + b/a)$$

Observe que si $b < a \Rightarrow F < P$ y se puede equilibrar al peso $\vec{P}$ (y por lo tanto se lo puede "levantar" a velocidad constante) con una fuerza menor.

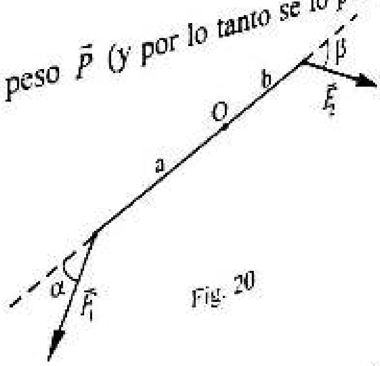


Fig. 20

Demuestre que en general para cualquier posición de la palanca y cualesquiera fuerzas aplicadas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, la condición es (ver Fig.20):

$$F_1 / F_2 = [(b/a)\,\mathrm{sen}\,\beta] / \mathrm{sen}\,\alpha$$

Y compruebe que esta ecuación es válida cualquiera sea el punto de apoyo **O** y los puntos de aplicación de las fuerzas siempre que a y b sean los "brazos de la palanca" entre el apoyo y los puntos de aplicación y que las fuerzas aplicadas produzcan momentos de signo opuesto respecto del apoyo.

Polea: ***La polea fija*** (o simplemente polea) es un disco rígido que puede girar alrededor de un eje que pasa por su centro, y su utilidad consiste en modificar la dirección de acción de una fuerza.

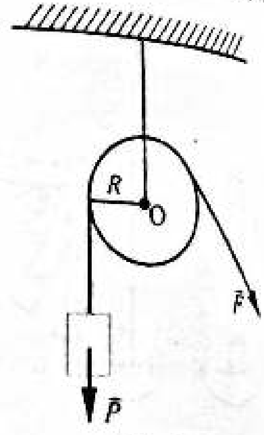


Fig. 21

Para el equilibrio, y tomando momentos respecto de **O**:

$$P.R - F.R = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{F = P}$$

La polea trabaja como una palanca de brazos iguales. Observe que el resultado obtenido no depende del ángulo de inclinación de $\vec{F}$.

La polea móvil tiene el peso colgado de su centro y un extremo de la cuerda fijo. Consideremos el caso de cuerdas verticales. Tomando momentos con respecto a **O** la condición de suma de momentos igual a cero conduce a:

$$F_1 = F$$

Y además la condición de suma de fuerzas nula da:

$$F_1 + F = P \;\Rightarrow\; \boxed{F = P/2}$$

(despreciando el peso propio de la polea)

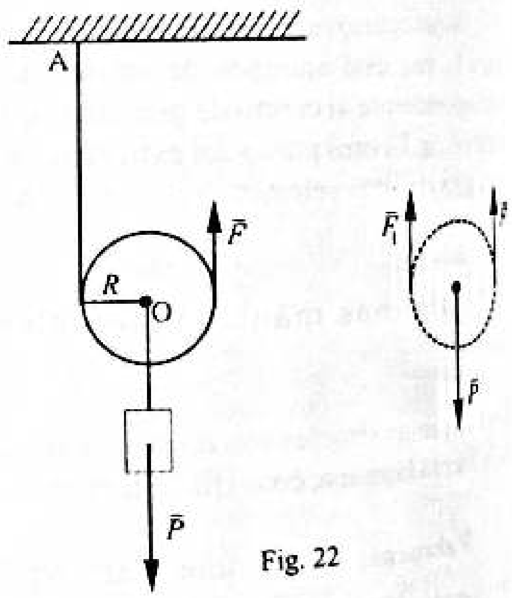


Fig. 22

Los mismos resultados se obtienen si se aplica dos veces la condición de momento total nulo con respecto a los puntos O y A.

Demuestre que en el caso general de la Fig. 23 con cuerdas oblicuas, para el equilibrio resulta la condición

$$\beta = \alpha$$

Y que la fuerza *la intensidad de F* vale:

$$F = P/(2\,sen\alpha)$$

De modo que siendo $sen\,\alpha \leq 1$, la mayor eficiencia (relación P/F) se da para la polea móvil de cuerdas verticales, Fig. 22.

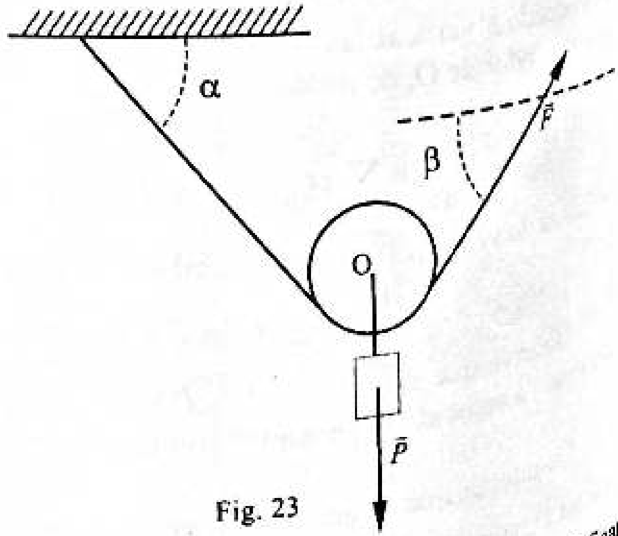


Fig. 23

Podemos combinar poleas para reducir la fuerza necesaria para levantar un peso o modificar su recta de acción. En la Fig. 24 se muestra una combinación de polea móvil y polea fija.

La polea móvil reduce la intensidad de la fuerza necesaria para levantar un peso de intensidad P a F/2. La polea fija modifica, sin cambiar su intensidad, la dirección de la fuerza a aplicar. Observe, y demuestre si no está convencido que $F = P/2$ cualesquiera sean los radios de las dos poleas.

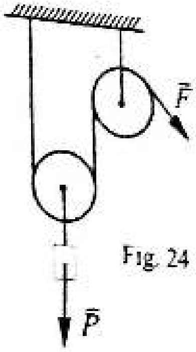


Fig. 24

Algunas combinaciones de poleas son de uso común bajo el nombre de aparejos.

En la Fig. 25 se muestran tres disposiciones clásicas de *aparejos*:

a) Aparejo **factorial:** es un conjunto de N poleas fijas unidas al mismo eje vertical y N poleas móviles también rígidamente unidas. En la figura $N = 3$ y se han "combado" las cuerdas para que quede clara su disposición. Demuestre que todas las sogas soportan una tensión de intensidad $F = P/6$ y que, en general

$$\boxed{F = P/(2\,N)}$$

b) Aparejo **potencial:** es una combinación de N poleas móviles ($N = 3$ en la figura). Como cada polea móvil "reduce" a la mitad la intensidad de la fuerza necesaria para soportar lo que cuelga de ella, demuestre que la primera polea soporta un peso de intensidad P, la segunda P/2, la tercera P/4 y finalmente $F = P/8$, o sea $F = P/2^3$.
En general:

$$\boxed{F = P/2^N}$$

c) Aparejo **diferencial:** se trata de una polea móvil que soporta el peso y dos poleas fijas de radios diferentes R y r $(R > r)$ unidas entre sí. Tomando momentos respecto de un punto **O** centro de las poleas fijas, demuestre que:

$$\boxed{F = P[(R - r)/2R]}$$

Los aparejos de este tipo suelen usar cadenas y engranajes, para evitar el deslizamiento. Observe que la fuerza $\bar{F}$ necesaria disminuye a medida que los radios de las poleas fijas se hacen de valor similar, pero por otra parte la rapidez con que se eleva el peso es proporcional a $R - r$, de modo que, a menor fuerza aplicada, menor velocidad de subida. Relacione este comportamiento con el teorema trabajo-energía.

a

b

c

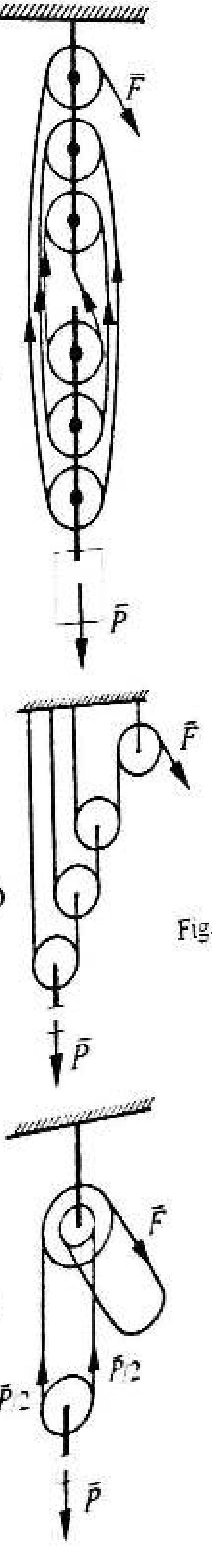


Fig. 25

Torno: El torno es un antiguo mecanismo que consiste en un rodillo de radio R provisto de una manivela de longitud l en un extremo.
El peso cuelga de una cuerda fija al rodillo y al girar la manivela esta cuerda se enrosca levantando al peso. En la condición de equilibrio aplique momentos respecto del eje del rodillo para demostrar que:

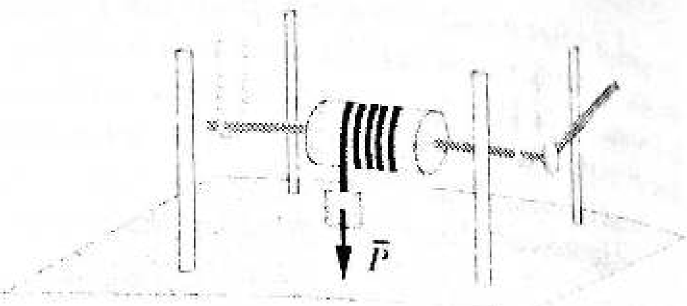


Fig.26

$$\boxed{F = (R/l)\,P}$$

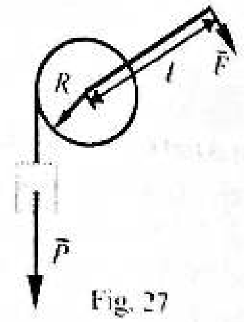


Fig. 27

Obviamente un rodillo de pequeño radio necesita muchas vueltas para levantar el peso, y una larga manivela, además de los problemas de construcción, una rigidez muy elevada.

Plano Inclinado: o también rampa. Muy usado para levantar objetos deslizándolos a su largo. Hemos visto ya que en el equilibrio:

$\boxed{F = P\,sen\alpha}$, y como $sen\alpha \leq 1 \Rightarrow F \leq P.$

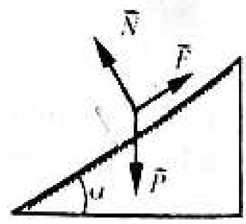


Fig. 28

Balanza: La balanza más simple consiste en una palanca de brazos iguales. Al poner un cuerpo pesado en el platillo izquierdo el fiel o indicador se desequilibra hacia la derecha de la escala. Se lo equilibra llevándolo a la posición original poniendo una pesa en el otro platillo. Para el equilibrio, tomando momentos respecto al punto de apoyo:

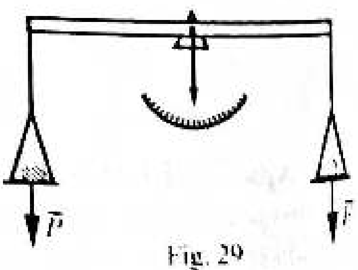


Fig. 29

$\boxed{F = P}$ (palanca de brazos iguales).

Es muy difícil que en la práctica los brazos sean exactamente iguales, de modo que producen errores que son importantes en pesadas de precisión. Para solucionar este problema puede recurrirse al método de la doble pesada, en el cual se determina primero el "peso" F_1 colocando el objeto, digamos, en el platillo de la izquierda y luego el "peso" F_2 colocando el objeto en el platillo de la derecha. Si los brazos son desiguales, digamos de longitud a_1 el de la izquierda y a_2 el de la derecha. F_1 será distinto de F_2. Planteando momentos para ambos casos:

$$P\,.\,a_1 = F_1\,.\,a_2 \qquad\qquad P\,.\,a_2 = F_2\,.\,a_1$$

Luego: $a_1 / a_2 = F_1 / P = P / F_2 \Rightarrow \boxed{P = \sqrt{F_1\,F_2}}$

La balanza de platillos es una palanca, cuyas condiciones de equilibrio hemos determinado con las ecuaciones de equilibrio de rotación. Hay otros argumentos posibles. Uno de los más antiguos y curiosos por el ingenio con que se formuló es el de Arquímedes, con el que deseamos concluir esta sección:

Análisis de Arquímedes de la palanca: Para hallar la condición de equilibrio, Arquimedes utilizó sólo nociones de simetría. Supuso que si la barra es uniforme, quedará en equilibrio al suspenderla de su punto medio. Seguidamente imaginó a la barra uniforme dividida en dos secciones desiguales, cada una de las cuales está suspendida de su punto medio. La varilla superior -pensó Arquimedes fundadamente- no alterará su condición, dado que, aunque de manera diferente, sigue ejerciendo las necesarias fuerzas para mantener la barra homogénea en la misma posición que antes.

Sólo resta una consideración geométrica: la distancia entre los dos hilos es la mitad de la longitud total, puesto que está formada por las mitades de ambos fragmentos añadidos. Trasladaremos mentalmente el segmento **AO** hacia la derecha, en un desplazamiento igual a $a/2$. Cuando A coincide con el hilo de la izquierda, **O** coincidirá con el de la derecha, y entonces podemos ver que la distancia y vale $a/2$. Análogamente, x vale $b/2$. Si se suponen los pesos de ambos fragmentos proporcionales a sus longitudes, resulta:

(peso de a)/(peso de b) = y/x

o bien

x . (peso de a) = y . (peso de b)

que es la ecuación que obtuvimos anteriormente.

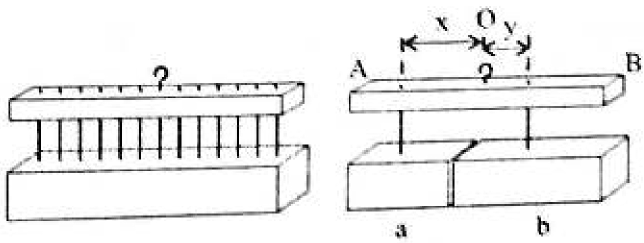


Fig. 30

2.8 - Resumen

Cuerpos extensos: Un cuerpo extenso puede considerarse como un conjunto de partículas que interaccionan entre sí mediante esfuerzos de cohesión.

Cuerpo rígido: Un cuerpo rígido es un cuerpo extenso que no se deforma bajo acción de fuerzas exteriores. Al no variar las distancias entre sus partículas las fuerzas de cohesión interiores no se modifican con respecto a la situación de cuerpo aislado.
Toda modificación del estado de movimiento del cuerpo rígido se produce a "causa" del sistema de fuerzas exteriores aplicadas.
Las fuerzas aplicadas a un cuerpo rígido se pueden trasladar a lo largo de su recta de acción sin modificar sus efectos.

Cupla: Un sistema de fuerzas aplicado a un cuerpo rígido constituye una cupla cuando su suma vectorial es nula, la suma de momentos no lo es, y no depende del centro de momentos. Los cuerpos rígidos sobre los que actúan cuplas giran acelerados sin que su centro de masa se acelere respecto de un sistema de referencia inercial.

Condiciones de equilibrio: $$\vec{f} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \end{cases} \qquad M_O = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} M_{OF} = 0$$

El centro de momentos **O** puede ser un punto cualquiera.

Centro de gravedad: Es el punto de aplicación del peso del cuerpo debida a la atracción gravitatoria.

FE DE ERRATAS

EDICION 1997 a 2003

Tema	Pág.	Donde dice	Debe decir
Fig. 3.13	48	$\vec{v} = +20 m/s\ \bar{i}$	$\vec{v} = +20 m/s\ \bar{j}$
Fig. 4.1	42	...constante $\vec{v}_{AB}$	...constante $\vec{v}_{BA}$
Primera ecuación	49	$y = tg\theta$.....	$y = y_0 + tg\theta$.....
Mov. Circ. Unif.	49	$\Delta w = \Delta s / r$	$\Delta\theta = \Delta s / r$
Dinámica	80	Fig. 1.25 $\leftarrow$	Fig. 1.25 $\rightarrow$
Energía mecánica	130	no conservativas o disipativas	no conservativas (tachar disipativas)
Trabajo de fuerzas elásticas	131	$L_{Fe} = \frac{1}{2} K [\Delta x_2^2 - \Delta x_1^2]$ $L_{Fe} = \frac{1}{2} K [(x_2 - l_0)^2 - (x_1 - l_0)^2]$ $L_{Fe} = \frac{1}{2} K [x_2^2 - x_1^2]$	$L_{Fe} = - \frac{1}{2} K [\Delta x_2^2 - \Delta x_1^2]$ $L_{Fe} = - \frac{1}{2} K [(x_2 - l_0)^2 - (x_1 - l_0)^2]$ $L_{Fe} = - \frac{1}{2} K [x_2^2 - x_1^2]$
Figura	137	Fig. 2.13	Fig. 2.11

INDICE