

Las fuerzas aplicadas a un cuerpo generalmente producen una aceleración; cuando la aceleración es nula entramos al campo de la estática.

1.1 - Equilibrio de cuerpos puntuales¹.

Un cuerpo puntual bajo la acción de un conjunto de fuerzas adquiere una aceleración que cumple:

$$\vec{f} = m\vec{a}$$

Donde m es la masa y \vec{a} la aceleración del cuerpo puntual, mientras que \vec{f} es la suma vectorial de todas las fuerzas aplicadas:

$$\vec{f} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n \quad 2$$

En el caso *estático*, la aceleración del cuerpo puntual es cero, entonces:

$$\vec{f} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$$

Y decimos que el cuerpo puntual está en **equilibrio**.

En otras palabras:

Si un cuerpo puntual está en equilibrio, la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre él es nula.

Note que *equilibrio* no significa *reposo*, dado que, siendo $\vec{a} = 0$, el cuerpo puntual puede moverse con un movimiento rectilíneo uniforme respecto del sistema de referencia que hemos elegido. Sin embargo, todos los sistemas de referencias inerciales son equivalentes para las Leyes de la Dinámica, de modo que en cualquiera se cumple que $\vec{f} = 0$. Por lo tanto generalmente se adopta en forma convencional un sistema de referencia en reposo respecto del cuerpo puntual cuya aceleración es nula, que es lo más natural y cómodo para realizar mediciones experimentales.

Dado que la condición de equilibrio $\vec{f} = 0$ es suficiente para el análisis de casos particulares, asumiremos por conveniencia que el objeto bajo estudio se halla en reposo respecto del sistema de referencia elegido.

¹ Llamamos cuerpo puntual a todo cuerpo de extensión idealmente nula.
² En los ejemplos de aplicación veremos como se utiliza esta notación.

Veamos algunos ejemplos de cuerpos puntuales en equilibrio:

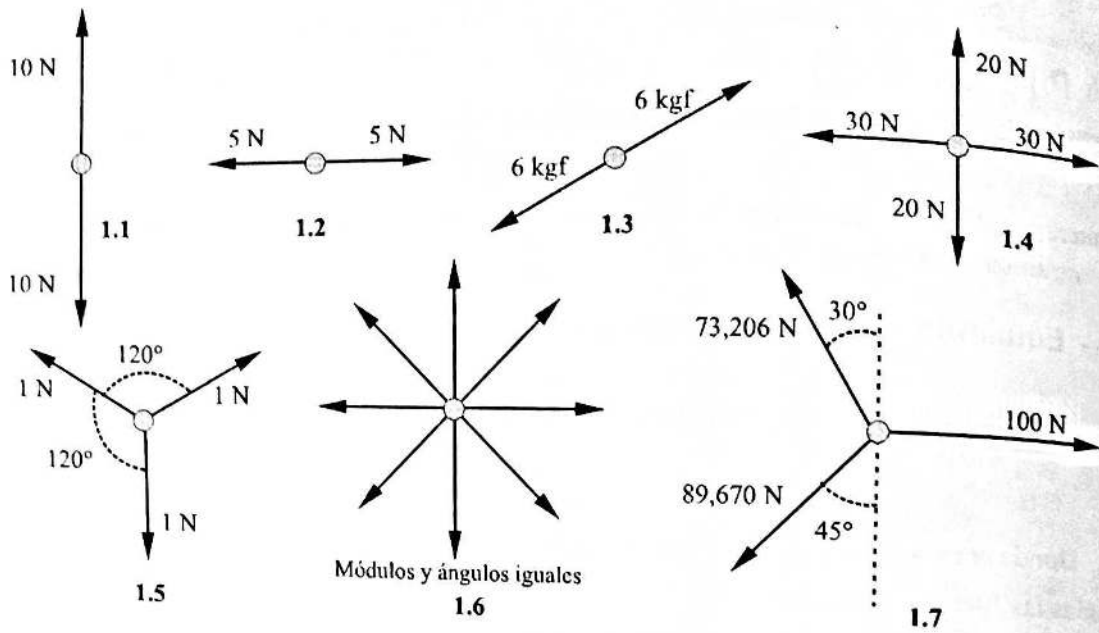


Fig. 1 - Cuerpos puntuales en equilibrio

Y como casos contrarios, podemos observar los siguientes ejemplos.

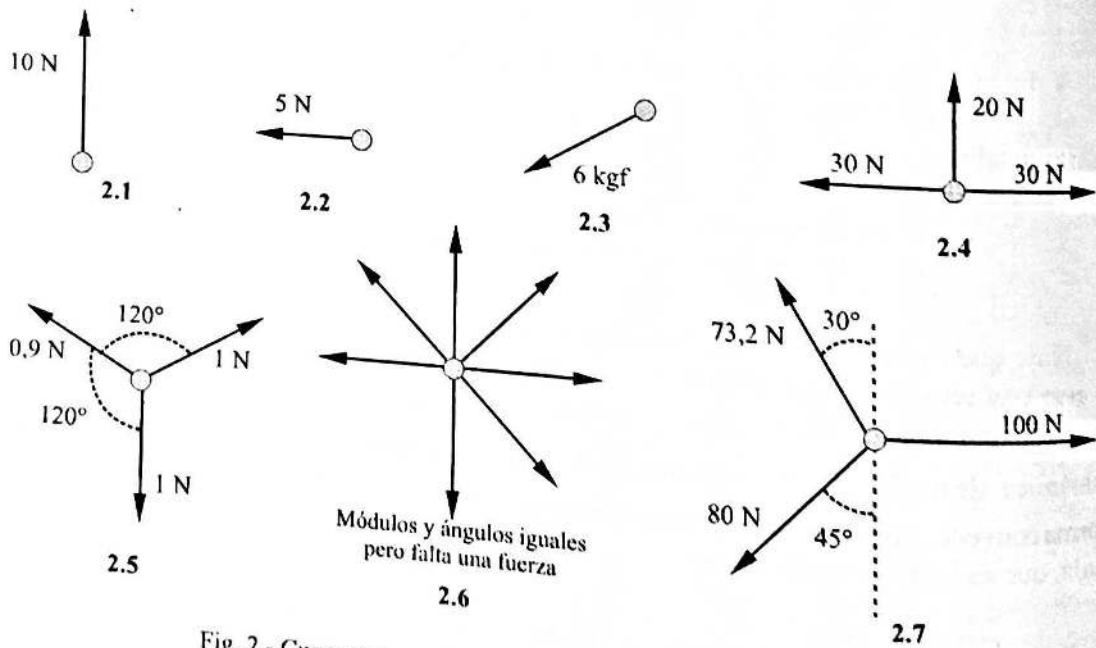


Fig. 2 - Cuerpos puntuales que no están en equilibrio

Analicemos y comparemos los casos de ambas figuras, Fig. 1 y Fig. 2. En los casos (1.1) al (1.4) de la Fig. 1 es fácil verificar que los cuerpos puntuales se hallan en equilibrio.

A cada fuerza del sistema de fuerzas³ le corresponde otra fuerza de iguales módulo y dirección y sentido opuesto, de modo tal que se anulan de a pares. Los casos (1.5), (1.6) y (1.7) no son tan evidentes, aunque (1.5) y (1.6) podrían analizarse, sin ecuaciones, por la simetría con que están dispuestas las fuerzas. El caso (1.7), finalmente, no admite consideraciones de simetría evidentes y es necesario comprobar matemáticamente la condición de equilibrio $\vec{f} = 0$; sumando vectorialmente las fuerzas del sistema. Pasemos antes de plantear este método matemático a la descripción de los casos de la Fig. 2.

Se decide rápidamente la situación de desequilibrio ya que la agrupación de pares opuestos de fuerzas se pierde. En los casos (2.1) al (2.3) hay una única fuerza actuando sobre el cuerpo puntual sin equilibrar. La fuerza que "falta" en los ejemplos (2.1) al (2.4) con respecto a los casos correspondientes de la Fig. 1 es la fuerza necesaria para equilibrar al cuerpo puntual, la cual llamaremos *equilibrante*.

También "falta" una fuerza en el sistema de la Fig. (2.6) y se pierde la disposición simétrica que llevaba al cuerpo puntual al equilibrio. Observe que también se pierde la simetría en el caso (2.5), porque las tres fuerzas ya no son de igual módulo. Como antes, el caso (2.7) es un ejemplo menos evidente para anticipar que ese cuerpo puntual no está en equilibrio.

En todos los casos de la Fig. 2 la sumatoria de fuerzas en cada uno de los cuerpos puntuales es distinta de cero. Entonces llamaremos *resultante*⁴ \vec{f}' a dicha sumatoria de fuerzas y podemos expresarla:

$$\vec{f}' = \sum_{i=1}^{n-1} \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_{n-1}$$

Y definimos la fuerza equilibrante \vec{e} , como $\vec{e} = -\vec{f}'$, que es la fuerza que "falta" para que el cuerpo puntual esté en equilibrio.

Tal que: $\vec{f} = \vec{f}' + \vec{e} = 0$ o sea $\vec{f} = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_{n-1} \right) + \vec{F}_n = 0$, donde \vec{F}_n es la fuerza equilibrante \vec{e} .

Resumiendo, como vemos son necesarias las sumas vectoriales de fuerzas para verificar si el cuerpo puntual está en equilibrio o para hallar la fuerza necesaria que hay que agregar para que esté en equilibrio. Para hallar \vec{f} , \vec{f}' o \vec{e} podemos realizar la *composición* de fuerzas, y es el tema que desarrollaremos a continuación.

1.2 - Composición de fuerzas concurrentes

Las fuerzas⁵ que actúan sobre un cuerpo puntual están aplicadas en un mismo punto, (el cuerpo). Por esta razón decimos que las fuerzas son *concurrentes*. Para sumar o componer un número cualquiera

³ Sistema de fuerzas es el conjunto de fuerzas que están aplicadas a un cuerpo, a veces diremos sólo sistema.

⁴ En secciones posteriores ampliaremos el concepto de resultante al de sistema equivalente con más detalle.

⁵ Las fuerzas son magnitudes vectoriales, de modo que se sumarán de acuerdo a las reglas generales presentadas en el Apéndice matemático, Capítulo 2.

ESTÁTICA

de fuerzas concurrentes es sólo necesario que sepamos sumar dos, dado que podemos sumar la resultante parcial con una tercera fuerza, y esta nueva resultante parcial con una cuarta, etc., hasta completar la totalidad de fuerzas del sistema.

Existen dos métodos básicos: el *método gráfico* que se basa en construcciones geométricas en escala, y el *método analítico* que se basa en las *proyecciones* de las fuerzas sobre un par de ejes no paralelos.

El *método gráfico* consiste en la aplicación de la llamada "*regla del paralelogramo*" que se ilustra en la Fig.3:

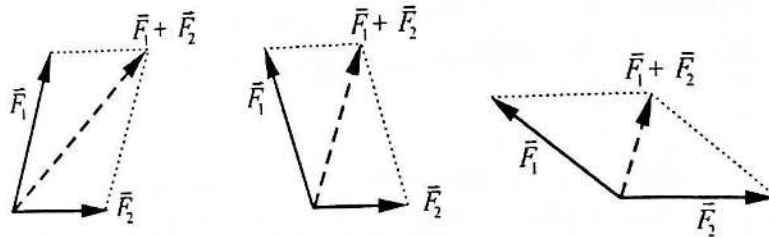


Fig. 3 - Regla del paralelogramo

Esta construcción puede transformarse en un triángulo llevando las fuerzas paralelamente una a continuación de la otra, como se indica en la Fig. 4; en este caso el vector suma tiene su origen en la primera fuerza y el extremo coincide con el extremo de la segunda.

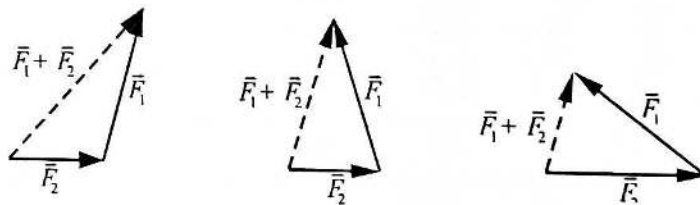


Fig. 4 - Triángulo de fuerzas

Y que tiene la ventaja de poder sumar más de dos fuerzas en un mismo gráfico, llevando sucesivamente una fuerza a continuación de la anterior, como se muestra en la Fig. 5:

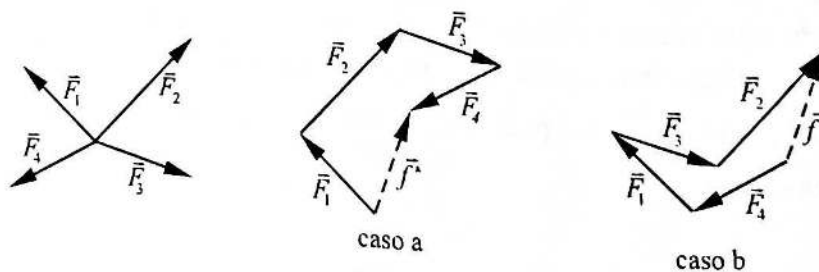


Fig. 5 - Polígono de fuerzas

Esta construcción suele denominarse *polígono de fuerzas*. Note en la Fig. 5 el *traslado paralelo* de las fuerzas y que los resultados no *dependen del orden* en que se las toma para formar el polígono: el orden $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ en el caso a y el orden $\vec{F}_4, \vec{F}_1, \vec{F}_3, \vec{F}_2$ en el caso b son equivalentes; en ambos la suma de las fuerzas es \vec{f}' .

En general las fuerzas del sistema se hallan en cualquier orientación en el espacio tridimensional, de modo que el polígono de fuerzas resulta también una figura de tres dimensiones. A lo largo de este curso trabajaremos únicamente con **sistemas planos de fuerzas**, es decir, todas las fuerzas del sistema se hallarán contenidas en un mismo plano, y el polígono de fuerzas será, entonces, una figura plana.

El *método analítico* de composición de fuerzas más usual se basa en realizar las proyecciones de las fuerzas sobre un par de ejes cartesianos, perpendiculares entre sí, suele también conocerse como *método de las proyecciones*.

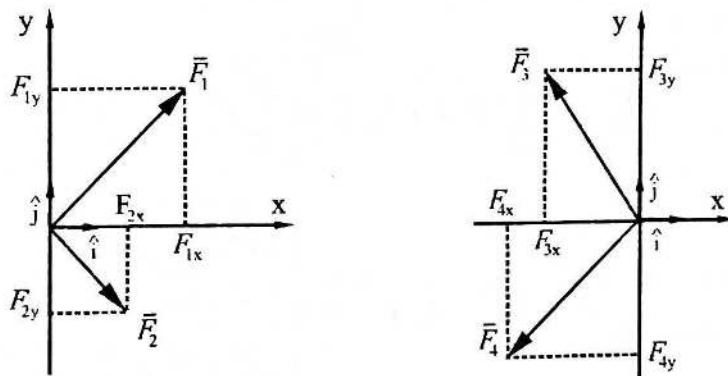


Fig. 6.a - Proyecciones de fuerzas

En la Fig. 6-a F_{1x} y F_{1y} son las proyecciones de \vec{F}_1 ; F_{2x} y F_{2y} son las proyecciones de \vec{F}_2 ; etc.; sobre los ejes x e y respectivamente.

En este método a las proyecciones de cada fuerza, se les asignan números llamados componentes escalares, que pueden ser positivos o negativos según la orientación de las fuerzas en relación a los ejes.

Se pueden calcular las componentes escalares de cada fuerza en función del módulo de la fuerza y de la correspondiente función trigonométrica asociada al ángulo que se conozca, ya que F_{1x} , F_{1y} y \vec{F}_1 determinan un triángulo rectángulo.

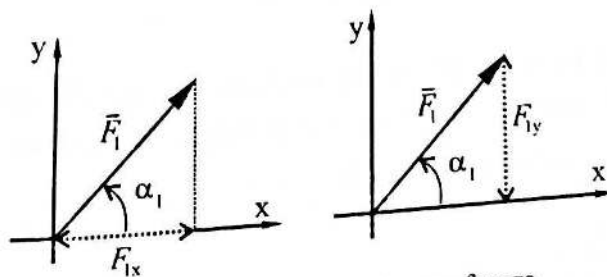


Fig. 6.b - Proyecciones de una fuerza

En la Fig. 6.b; $F_{1x} = |\vec{F}_1| \cos \alpha_1$ y $F_{1y} = |\vec{F}_1| \operatorname{sen} \alpha_1$; siendo α_1 es el ángulo medido desde el semieje positivo de las x , en sentido antihorario, hasta la semirrecta que representa la dirección de \vec{F}_1 , en este caso se lo considera positivo (en sentido horario negativo); y así sucesivamente podemos obtener todas las componentes escalares de las fuerzas que están aplicadas a un cuerpo puntual.

En términos de los versores ($\vec{i}; \vec{j}$), asociados a los ejes x e y podemos escribir:

$$\vec{F}_1 = F_{1x} \vec{i} + F_{1y} \vec{j}$$

$$\vec{F}_2 = F_{2x} \vec{i} + F_{2y} \vec{j}$$

.....

$$\vec{F}_{n-1} = F_{(n-1)x} \vec{i} + F_{(n-1)y} \vec{j}$$

Por lo tanto, la resultante \vec{f}' es:

$$\vec{f}' = \sum_{i=1}^{n-1} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n-1} (F_{ix} \vec{i} + F_{iy} \vec{j}) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} F_{ix} \right) \vec{i} + \left(\sum_{i=1}^{n-1} F_{iy} \right) \vec{j}$$

$$\vec{f}' = f'_x \vec{i} + f'_y \vec{j} \Rightarrow \begin{cases} f'_x = \sum_{i=1}^{n-1} F_{ix} \\ f'_y = \sum_{i=1}^{n-1} F_{iy} \end{cases}$$

O sea la suma de un sistema de fuerzas aplicadas a un cuerpo puntual se puede hallar a partir de la suma de las componentes escalares de cada una de las fuerzas y los versores asociados a los ejes elegidos.

Luego, el método de las proyecciones puede resumirse en las siguientes operaciones:

- a) Definir un par de ejes cartesianos, es decir perpendiculares, centrados en el cuerpo puntual.
- b) Trazar las proyecciones y calcular las componentes de todas las fuerzas del sistema.
- c) Hallar las componentes escalares de la resultante, sumado las componentes de todas las fuerzas según cada eje.
- d) Expresar vectorialmente la resultante.

Esta última operación se puede realizar: I) mediante el uso de versores o II) calculando el módulo de la resultante con el teorema de Pitágoras y luego calcular el ángulo que forma la dirección de \vec{f}' con el semieje positivo de las x ,⁵.

I) $\boxed{\vec{f}' = f'_x \vec{i} + f'_y \vec{j}}$ (1)

II) $\boxed{|\vec{f}'| = \sqrt{f_x'^2 + f_y'^2}}$ (2) y $\boxed{\alpha = \arctg\left(\frac{f'_y}{f'_x}\right)}$ (3)

⁵ También puede usarse otro criterio para indicar la dirección de la fuerza en el plano (x,y) en lugar del ángulo mencionado.

Sabiendo que:

$$f'_x = \sum_{i=1}^{n-1} (F_{1x} + \dots + F_{(n-1)x}) \quad \text{y} \quad f'_y = \sum_{i=1}^{n-1} (F_{1y} + \dots + F_{(n-1)y}) \quad (4)$$

Entonces, reemplazando en Ec.(4) los módulos de las fuerzas y las funciones trigonométricas correspondientes obtenemos f'_x y f'_y ; luego utilizando la Ec.(1) podemos expresar vectorialmente la resultante \vec{f}' . También podemos hacerlo reemplazando f'_x y f'_y en la Ec.(2) y en la Ec.(3), o sea calcular el módulo de \vec{f}' y el ángulo α indicado en la Fig. 7, que es otra forma de expresar un vector.

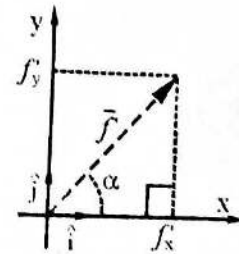


Fig. 7 - Proyecciones de la resultante

De acuerdo a los signos de las componentes escalares f'_x y f'_y de la resultante, se puede anticipar en qué cuadrante está la misma, respecto del sistema de referencia cartesiano utilizado, Fig. 8:

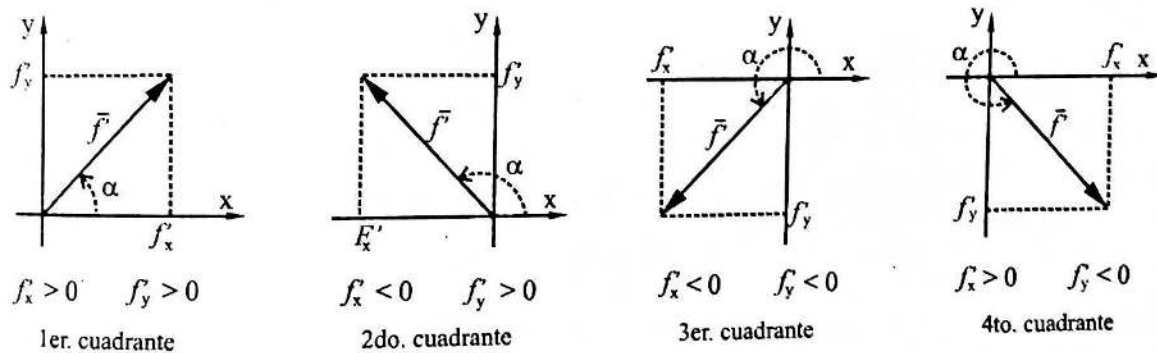


Fig. 8 - Resultantes en los distintos cuadrantes.

1.2.1 - Ejemplos de aplicación

Verificar si el cuerpo puntual de la Fig. 1 (1.7) está en equilibrio:

- $|\vec{F}_1| = 100 \text{ N}$
- $|\vec{F}_2| = 73,206 \text{ N}$
- $|\vec{F}_3| = 89,670 \text{ N}$

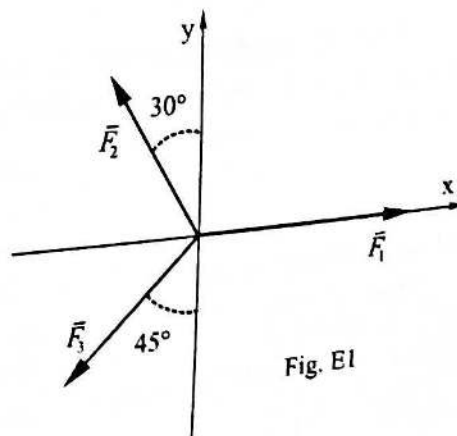


Fig. E1

Se puede deducir de la figura que:

$$\alpha_1 = 0^\circ ; \alpha_2 = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ \text{ y } \alpha_3 = 180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$$

Si el cuerpo está en equilibrio se cumple que $\vec{f} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$, tal que también se cumple:

$$\vec{f} = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} = 0 \Rightarrow \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_x = \sum_{i=1}^n (F_{1x} + \dots + F_{nx}) = 0 \\ f_y = \sum_{i=1}^n (F_{1y} + \dots + F_{ny}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_x = \sum_{i=1}^3 (F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}) = 0 \\ f_y = \sum_{i=1}^3 (F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

En la Fig. E1 ya están dibujados los ejes x e y . Con los datos calculemos las componentes escalares de las fuerzas:

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &\Rightarrow \begin{cases} F_{1x} = |\vec{F}_1| \cos 0^\circ = 100 \text{ N} \\ F_{1y} = |\vec{F}_1| \sen 0^\circ = 0 \end{cases} \\ \vec{F}_2 &\Rightarrow \begin{cases} F_{2x} = |\vec{F}_2| \cos 120^\circ = |\vec{F}_2| (-0,5) = 73,206 \text{ N } (-0,5) \\ F_{2y} = |\vec{F}_2| \sen 120^\circ = |\vec{F}_2| \frac{\sqrt{3}}{2} = 73,206 \text{ N } \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \\ \vec{F}_3 &\Rightarrow \begin{cases} F_{3x} = |\vec{F}_3| \cos 225^\circ = |\vec{F}_3| (-\frac{\sqrt{2}}{2}) = 89,670 \text{ N } (-\frac{\sqrt{2}}{2}) \\ F_{3y} = |\vec{F}_3| \sen 225^\circ = |\vec{F}_3| (-\frac{\sqrt{2}}{2}) = 89,670 \text{ N } (-\frac{\sqrt{2}}{2}) \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

Observe que no hay componente de \vec{F}_1 sobre el eje y , porque el ángulo entre la dirección de la fuerza y el eje x es 0° y el $\sen 0^\circ = 0$. Los signos de las componentes escalares quedan determinados por las funciones trigonométricas usadas para cada ángulo α_i , tal como fue definido anteriormente.

También pueden usarse los ángulos dados en la figura, pero las funciones trigonométricas de dichos ángulos no son necesariamente las mismas que usamos con los α_i para hallar las componentes escalares.

Como son ángulos del primer cuadrante y las funciones seno y coseno son positivas, entonces los signos de las componentes deben anticiparse según el cuadrante y el semieje que corresponda a la proyección de la fuerza, por ejemplo:

$$F_{2x} = -|\vec{F}_2| \sen 30 \text{ es equivalente a } F_{2x} = |\vec{F}_2| \cos 120^\circ \text{ porque } -\sen 30^\circ = \cos 120^\circ$$

Reemplazando los resultados parciales de Ec. (2) en Ec.(1), resulta:

$$\begin{cases} f_x = \sum_{i=1}^3 (100 \text{ N} + 73,206 \text{ N}(-0,5) + 89,670 \text{ N}(-\frac{\sqrt{2}}{2})) = 0,00031 \text{ N} \Rightarrow \boxed{f_x \approx 0} \\ f_y = \sum_{i=1}^3 (0 + 73,206 \text{ N} \frac{\sqrt{3}}{2} + 89,670 \text{ N}(-\frac{\sqrt{2}}{2})) = -0,00029 \text{ N} \Rightarrow \boxed{f_y \approx 0} \end{cases}$$

Para realizar las cuentas se ha utilizado $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$ y $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$. La suma de las componentes escalares de las fuerzas según los ejes x y y resultaron aproximadamente nulas. Luego, podemos decir que el cuerpo puntual de la Fig. 1 (1.7) está en equilibrio teniendo en cuenta las aproximaciones con que se trabajó al realizar las cuentas.

Se podría también verificar que el cuerpo puntual de la Fig.1 (1.7) está en equilibrio por otro camino, por ejemplo; hallando la resultante parcial entre \vec{F}_2 y \vec{F}_3 que debería dar $\vec{f}'_{23} \approx -100 \text{ N } \hat{i}$. Les dejamos a ustedes la explicación.

Dos fuerzas de 70 kgf que forman entre sí un ángulo de 65° actúan sobre un cuerpo puntual. Determinar la fuerza necesaria para que el cuerpo puntual esté en equilibrio.

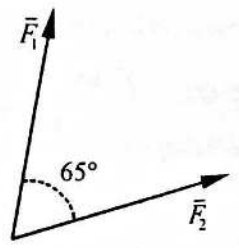


Fig. E2a

Para hallar la fuerza equilibrante \vec{e} , es necesario hallar la resultante \vec{f}' , ya que hemos definido: $\vec{e} = -\vec{f}'$

Calculemos \vec{f}' ; para ello usando el método gráfico, construimos el triángulo de fuerzas llevando, por ejemplo, \vec{F}_2 a continuación de \vec{F}_1 , y hallamos \vec{f}' ; y como ya sabemos \vec{e} es la fuerza de igual módulo y dirección y sentido contrario a \vec{f}' , como se indica en la Fig. E2b.

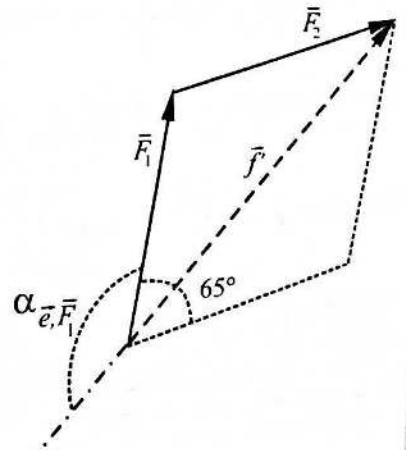


Fig. E2b

Supuesta una escala para el gráfico se puede medir en él directamente el módulo de \vec{e} .

Podemos hallar el ángulo $\alpha_{\vec{e}, \vec{F}_1}$, que es el ángulo entre la dirección de la equilibrante y la dirección de \vec{F}_1 , entonces:

$$\alpha_e = 180^\circ - 0,5 \cdot 65^\circ = 147^\circ 30'$$

Dado que la diagonal del paralelogramo de fuerzas, coincide con la dirección de \vec{e} , divide al ángulo de 65° formado por las fuerzas del sistema en dos ángulos iguales, porque el paralelogramo en este caso es un rombo, o sea, tiene lados iguales.

Apliquemos ahora el método analítico de proyecciones. Para ello debemos elegir un sistema de ejes cartesianos. Cualquiera que elijamos es adecuado, pero podemos simplificar las matemáticas si colocamos uno de los ejes paralelo a una de las fuerzas. Elegimos entonces los ejes de la Fig. E2c.

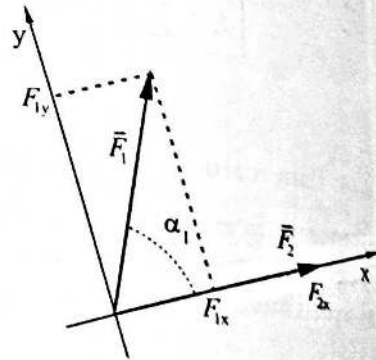


Fig. E2c

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = 70 \text{ kgf} ; \alpha_1 = 65^\circ ; \alpha_2 = 0$$

Calculemos las componentes escalares respecto de los ejes x e y de cada fuerza:

$$\vec{F}_1 \Rightarrow \begin{cases} F_{1x} = |\vec{F}_1| \cos 65^\circ \\ F_{1y} = |\vec{F}_1| \sin 65^\circ \end{cases} \quad \vec{F}_2 \Rightarrow \begin{cases} F_{2x} = |\vec{F}_2| \cos 0^\circ \\ F_{2y} = |\vec{F}_2| \sin 0^\circ = 0 \end{cases}$$

Siendo: $\vec{f}' \Rightarrow \begin{cases} f'_x = (F_{1x} + F_{2x}) \vec{i} \\ f'_y = (F_{1y} + F_{2y}) \vec{j} \end{cases}$

Reemplazando: $\begin{cases} f'_x = (|\vec{F}_1| \cos 65^\circ + |\vec{F}_2| \cos 0^\circ) \vec{i} = 99,5833 \text{ kgf } \vec{i} \\ f'_y = (|\vec{F}_1| \sin 65^\circ + 0) \vec{j} = 63,4415 \text{ kgf } \vec{j} \end{cases}$

Luego si:

$$\vec{f}' = 99,6 \text{ kgf } \vec{i} + 63,4 \text{ kgf } \vec{j}$$

Y siendo: $\vec{e} = -\vec{f}'$

Resulta:

$$\vec{e} = -99,6 \text{ kgf } \vec{i} - 63,4 \text{ kgf } \vec{j}$$

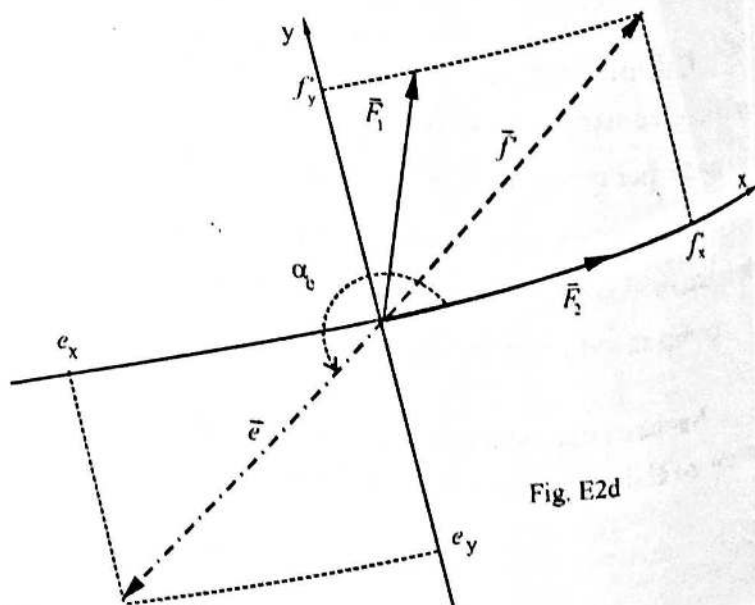


Fig. E2d

También podemos calcular el módulo de \vec{e}

$$|\vec{e}| = \sqrt{e_x^2 + e_y^2} \Rightarrow |\vec{e}| = \sqrt{(-99,6 \text{ kgf})^2 + (-63,4 \text{ kgf})^2}$$

$$|\vec{e}| \approx 118,1 \text{ kgf}$$

Y la dirección de \vec{e} con el semieje positivo de las x formará un ángulo α_e :

$$\alpha_e = \text{arctg} \left(\frac{e_y}{e_x} \right) \Rightarrow \alpha_e = \text{arctg} \left(\frac{-63,4 \text{ kgf}}{-99,6 \text{ kgf}} \right)$$

$$\alpha_e = 212^\circ 30'$$

Resultó un ángulo del 3er. cuadrante como era de esperarse, ya que las componentes escalares de \vec{e} son negativas según el sistema de referencia elegido.

1.3 - Descomposición de fuerzas

En muchos casos es necesario hallar un sistema de fuerzas equivalente a una única fuerza dato. O sea un sistema cuya resultante coincida con la fuerza dato. Del sistema se conocen las direcciones o rectas de acción de las fuerzas y se desea averiguar sus intensidades.

En el plano este problema admite una única solución cuando las direcciones de *descomposición* de la fuerza dato son dos, concurrentes a un punto sobre la recta de acción de la fuerza dato. Las fuerzas así obtenidas se denominan componentes de la fuerza dato en las direcciones dadas.

Hemos ya visto un caso de descomposición de fuerzas al hallar las proyecciones de una fuerza sobre un par ejes cartesianos. Con la notación que ya usamos en la sección 1.2, podemos expresar la fuerza \vec{F} :

$$\vec{F}_x = F_x \vec{i} ; \vec{F}_y = F_y \vec{j} \Rightarrow \vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$$

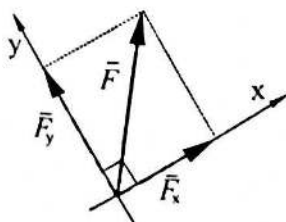


Fig. 9.a - Descomposición de una fuerza en dos direcciones perpendiculares

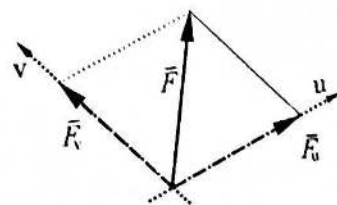


Fig. 9.b - Descomposición de una fuerza en dos direcciones no perpendiculares

En general, para un par de direcciones (u,v) no necesariamente perpendiculares, $\vec{F} = \vec{F}_u + \vec{F}_v$.

Fig. 9b.

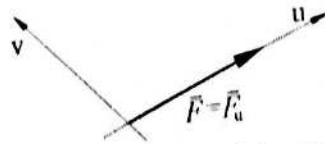


Fig. 10 - La fuerza coincide con la componente vectorial en esa dirección.

Cuando de las dos direcciones en que se desea descomponer una fuerza, una de ellas coincide con la dirección de la fuerza, entonces la fuerza componente es coincidente a la fuerza que se desea descomponer, y la componente en la otra dirección es nula.

Note que la afirmación habitual de que la componente de una fuerza según una dirección perpendicular es nula, sólo vale para el caso de dos direcciones perpendiculares. El ejemplo siguiente muestra cómo es perfectamente posible que una fuerza tenga componente no nula en una dirección perpendicular (siempre que la otra dirección no sea paralela a la fuerza)

En este ejemplo se ve claramente que no hay que confundir la *proyección* (componente escalar) de una fuerza sobre una dirección con la *componente vectorial* de la fuerza sobre esa misma dirección: la *proyección* (componente escalar) se determina trazando rectas perpendiculares a la dirección dada desde los extremos del vector fuerza. La componente vectorial, trazando rectas paralelas a la otra dirección de descomposición.

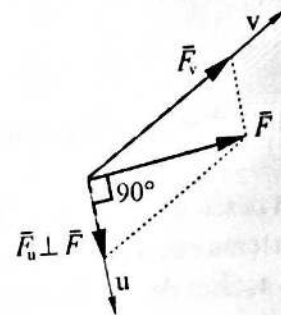


Fig. 11 - La fuerza tiene una componente vectorial perpendicular a ella.

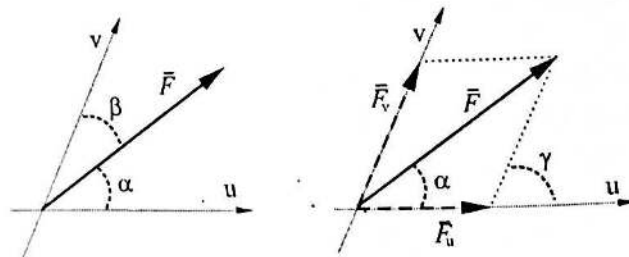


Fig. 12.a - Componentes vectoriales de una fuerza en las direcciones (u,v)

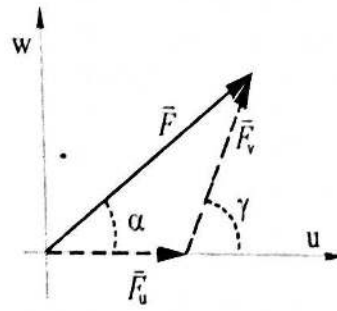
Si las direcciones de descomposición son perpendiculares, las componentes escalares y vectoriales coinciden en valor absoluto, pero es el único caso en que esto ocurre.

Veamos cómo se realiza la descomposición de una fuerza en dos direcciones concurrentes.

Los datos del problema son la intensidad de \vec{F} , fuerza a descomponer, el ángulo que forman con una de las direcciones y el ángulo entre las dos direcciones, como se muestra en la Fig. 12a.

Como $\vec{F} = \vec{F}_u + \vec{F}_v$ podemos utilizar los métodos de suma de vectores como la regla del paralelogramo, que nos lleva al triángulo de la Fig. 12.b o el de las proyecciones.

Consideremos un eje w perpendicular a u . Las proyecciones de las fuerzas \vec{F} y $(\vec{F}_u + \vec{F}_v)$ sobre los ejes u y w deben ser iguales por la igualdad de las fuerzas. Luego podemos escribir:



$$\text{proyecciones sobre } u \Rightarrow |\vec{F}| \cos \alpha = F_u + |\vec{F}_v| \cos \gamma \quad (1)$$

$$\text{proyecciones sobre } w \Rightarrow |\vec{F}| \sin \alpha = |\vec{F}_v| \sin \gamma \quad (2)$$

De la Ec. (2) obtenemos:

$$|\vec{F}_v| = |\vec{F}| (\sin \alpha / \sin \gamma) \quad (3)$$

Y reemplazando la Ec. (3) en la Ec. (1):

$$|\vec{F}| \cos \alpha = F_u + |\vec{F}| (\sin \alpha / \sin \gamma) \cos \gamma \Rightarrow F_u = |\vec{F}| \cos \alpha - |\vec{F}| (\sin \alpha / \tan \gamma)$$

Finalmente:

$$F_u = F \cos \alpha (1 - \tan \alpha / \tan \gamma)$$

Podemos así calcular las intensidades de las componentes vectoriales \vec{F}_u y \vec{F}_v a partir de los datos del problema.

1.4 - Fuerzas de vínculo

Hasta el momento hemos considerado fuerzas aplicadas sobre un cuerpo puntual, sin realizar consideraciones acerca de cómo se las aplica. En el mundo real esto debe hacerse por medio de determinados agentes mecánicos: en la Fig. 13 se ha esquematizado una grúa soportando una caja en equilibrio.

El sistema de fuerzas aplicado sobre ella tiene suma de fuerzas nula. ¿Cómo identificamos a estas fuerzas? Una será el peso de caja, la fuerza de atracción gravitatoria terrestre. Las otras están aplicadas a través de las sogas que cuelgan del guinche. Consideremos ahora el guinche como nuestro cuerpo puntual. El sistema de fuerzas aplicado sobre el mismo está en equilibrio. ¿Cuáles son las fuerzas que lo componen? Por un lado las fuerzas aplicadas por las cuatro sogas que cuelgan de él y por el otro la fuerza del cable de acero de la grúa.

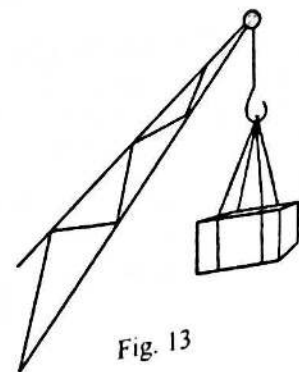


Fig. 13

Entonces vemos cuáles son los agentes mecánicos que ejercen las fuerzas: se trata de sogas y cables (y también puede ser hilos, cuerdas, etc.). La característica más importante "y definitoria" de estos agentes desde el punto de vista de la estática es que transmiten fuerzas de tracción (o sea, que ponen tensa a la soga) a lo largo de su recta *exclusivamente*.

Los agentes mecánicos que permiten aplicar un sistema de fuerzas a un cuerpo puntual se denominan *vínculos*, dado que "vinculan" o restringen la posibilidad de movimiento de un cuerpo puntual u objeto *vinculado*.

El vínculo de una sogá (o cable) limita el movimiento del objeto como si este fuera una esfera sujeta desde el centro ver Fig. 14.

Para resolver una situación estática con vínculos, reemplazamos al vínculo por la fuerza que realiza sobre el objeto en estudio. Para el caso del vínculo sogá, la fuerza que ésta ejerce sobre el cuerpo puntual, tiene la dirección coincidente con la recta de la sogá tensa y su efecto es tirar del cuerpo puntual.

A menudo se conoce esta *fuerza de vínculo* como *tensión* de la sogá y se la designa \vec{T} ó \vec{F}_t .

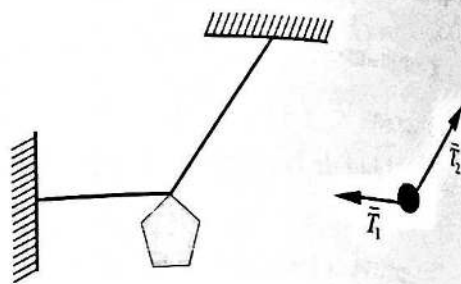


Fig. 14

1.4.1 - Ejemplo de aplicación

Los extremos de un cable de 3m de largo se fijan a una viga horizontal en puntos separados 1,80 m. Se suspende un cuerpo de peso 22 kgf, del centro del cable. Calcular la tensión de cada sección del cable.

En este problema hay tres cables: las dos secciones que cuelgan de la viga y el cable del que cuelga un cuerpo.

Poniendo en evidencia todas las fuerzas de vínculo que actúan sobre el punto O de unión de cables queda el sistema de fuerzas de la figura. Note que los ángulos α que forman las tensiones \vec{T}_1 y \vec{T}_2 con la vertical son iguales porque el cuerpo puntual se lo cuelga del centro del cable de 3 m.

Por lo tanto $OA = OB = 1,5$ m. Junto con el dato $AB = 1,8$ m, podemos calcular el valor de α : el triángulo rectángulo OCB de la figura se cumple que:

$$\text{sen } \alpha = \frac{CB}{OB} = \frac{0,9 \text{ m}}{1,5 \text{ m}} = 0,6 \text{ m} \Rightarrow \text{sen } \alpha = 36^\circ 52' 12''$$

O también, aplicando el teorema de Pitágoras:

$$OC = \sqrt{(OB)^2 - (CB)^2} = \sqrt{(1,5 \text{ m})^2 - (0,9 \text{ m})^2} = 1,2 \text{ m}$$

y entonces: $\text{cos } \alpha = \frac{OC}{OB} = \frac{1,2 \text{ m}}{1,5 \text{ m}} = 0,8$

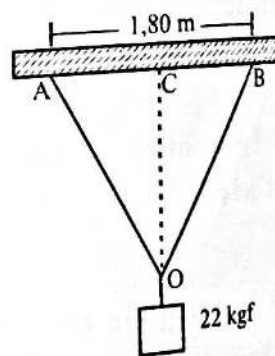


Fig. E3a

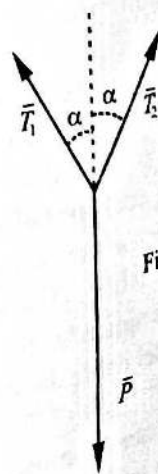


Fig. E3b

Conocido α (o sus funciones trigonométricas $\text{sen}\alpha = 0,6$ y $\text{cos}\alpha = 0,8$) vamos ahora a averiguar las tensiones \vec{T}_1 y \vec{T}_2 , por la simetría del problema parece que $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2|$.

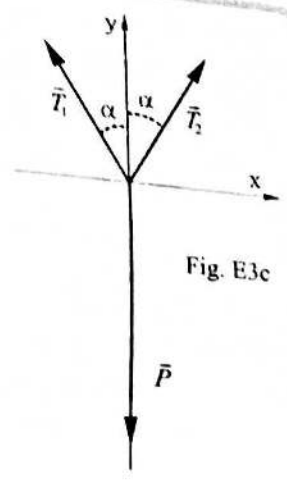


Fig. E3c

Vamos a verificarlo determinando la condición de equilibrio $\vec{f} = 0$, por ejemplo con el método de las proyecciones.

Tomamos un par de ejes horizontal y vertical y tenemos que para el equilibrio:

$$f_x = -|\vec{T}_1| \text{sen}\alpha + |\vec{T}_2| \text{sen}\alpha + 0 = 0$$

$$f_y = |\vec{T}_1| \text{cos}\alpha + |\vec{T}_2| \text{cos}\alpha - P = 0$$

De la primera ecuación, simplificando $\text{sen}\alpha$ llegamos a que: $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = |\vec{T}|$ y efectivamente las tensiones sobre cada mitad del cable son iguales.

Reemplazando en la segunda ecuación:

$$2|\vec{T}| \text{cos}\alpha - |\vec{P}| = 0 \Rightarrow |\vec{T}| = \frac{|\vec{P}|}{2 \text{cos}\alpha} = 22 \text{ kgf} / (2 \cdot 0,8)$$

$$|\vec{T}| = 13,75 \text{ kgf}$$

El resultado hallado es el módulo de la tensión en cada uno de los cables.

1.5 - Resumen

Sistemas de fuerzas equivalentes: dos sistemas de fuerzas son equivalentes cuando producen los mismos efectos sobre el objeto al que se aplican. Como consecuencia pueden ser equilibradas por un mismo tercer sistema de fuerzas.

Equilibrante: Se llama equilibrante de un dado sistema de fuerzas al sistema compuesto por una única fuerza, capaz de equilibrar al cuerpo puntual.

Resultante: se llama resultante de un dado sistema de fuerzas al sistema compuesto por una única fuerza equivalente al sistema dado.

$$\vec{f} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$$

Condición de equilibrio de un cuerpo puntual:

Esta ecuación la podemos escribir en función de las componentes escalares:

$$f = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} = 0 \Rightarrow \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_x = \sum_{i=1}^n (F_{ix}) = 0 \\ f_y = \sum_{i=1}^n (F_{iy}) = 0 \end{cases}$$

Si el cuerpo puntual no está en equilibrio la equilibrante \vec{e} , se puede calcular $\vec{e} = -\vec{f}'$, siendo:

$$\vec{f}' = \sum_{i=1}^{n-1} \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_{n-1}$$

Vinculo o ligadura: Se llama vinculo o ligadura a cualquier restricción impuesta sobre el movimiento del cuerpo puntual.