

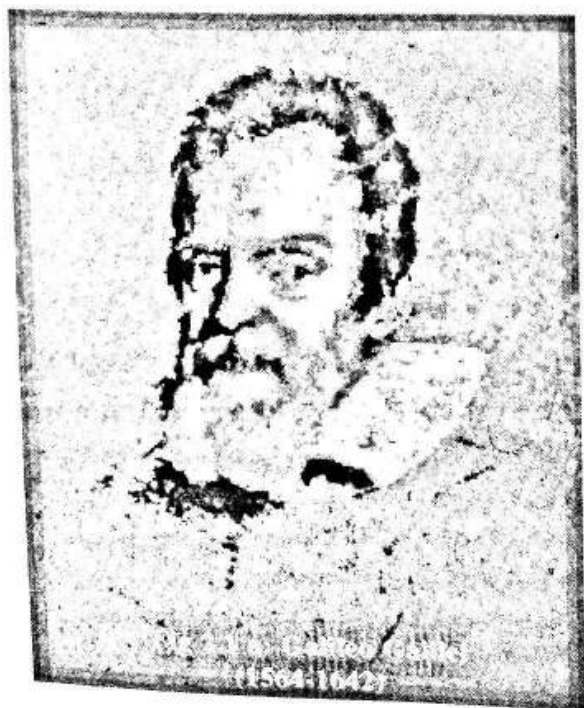
2.1 FUERZAS DE ROZAMIENTO

En los casos estudiados hasta ahora hemos despreciado el rozamiento, ya sea porque interviene en pequeño grado o porque lo excluimos a fines de estudiar un problema con el máximo grado de simplicidad.

Hay muchas clases de rozamiento: entre sólidos, entre sólido y líquido, ente sólido y gas, entre líquidos, por deslizamiento entre superficies de sólidos, por rodadura sin deslizamiento de un sólido sobre otro, etc. Los casos más sencillos de tratar son los de rozamiento por deslizamiento entre superficies sólidas y los de rodadura entre el mismo tipo de superficies. Por ejemplo, se sabe que arrastrar un bloque sobre el piso demanda mayor esfuerzo que si se apoya el bloque sobre una tabla, debajo de la cual se ponen trozos de caño. El rozamiento por rodadura es menor, a iguales materiales, que el de deslizamiento.

Cuando se diseñan engranajes, se trata de que sus dientes rueden sin deslizar unos sobre otros, lo que constituye un atractivo problema de geometría, no sólo para lograr que los movimientos se transmitan con menores pérdidas por rozamiento, sino también para aumentar la vida útil de las piezas.

El movimiento de los astros es prácticamente libre de rozamientos, y por esta razón su estudio contribuyó grandemente al descubrimiento de las leyes dinámicas. En cambio, en nuestro mundo terrestre atmosférico, el rozamiento resulta inevitable o difícil de eliminar, y así la humanidad hasta el siglo XVI creyó que para mantener un movimiento era necesario la permanente aplicación de fuerzas, cuando en realidad para alguno de ellos, como los M.R.U., lo que es necesario hacer es eliminar toda fuerza, también el rozamiento; o compensarlas.



A pesar del poderoso interés tecnológico en reducir el rozamiento para los fines prácticos de evitar desgastes y economizar combustibles, no es sencilla su eliminación, sobre todo en lo que respecta a movimientos de traslación. Galileo cuenta que redujo considerablemente el rozamiento en sus planos inclinados puliendo cuidadosamente el canal de madera y tapizándolo con pergamino.

Actualmente se logra en la industria y el laboratorio la eliminación casi completa del rozamiento por deslizamiento mediante el recurso de mantener separadas las superficies con un colchón de aire comprimido.



Fig. 2.1: Dispositivo llamado colchón de aire.

Estas mesas y rieles de aire tienen gran utilidad en laboratorios de enseñanza. El deslizamiento suave e indefinido de los bloques en los rieles es muy curioso y atractivo. Esta es una de las dificultades de la enseñanza de la dinámica: nos maravillamos cuando se manifiestan sus leyes, y en cambio nos parece absolutamente natural que el automóvil se detenga cuando se queda sin nafta, en vez de permanecer en movimiento rectilíneo y uniforme.

2.1.1 MESA DE AIRE IMPROVISADA

Pídale a un vendedor ambulante de helados un trozo de hielo seco (CO_2 sólido), y apóyelo sobre una mesa lisa. El anhídrido carbónico se volatilizará y formará un colchón gaseoso, por lo que se deslizará hacia los puntos de menor nivel. Si sobre dos trozos de hielo se colocan sendos imanes, se producen vistosos movimientos semejantes a los astronómicos. Este efecto perdura hasta que se gasten los trozos de hielo seco o hasta que la mesa se enfríe mucho y ya no volatilice suficiente cantidad de sustancia.

Consideremos un cuerpo en reposo, apoyado sobre una superficie horizontal. Su peso $m\vec{g}$ se equilibra por la fuerza \vec{N} que le ejerce el plano (Fig. 2.2 a). Si le aplicamos una pequeña fuerza \vec{F} en la dirección tangencial a la superficie comprobamos que el cuerpo permanece en reposo, es decir que hay una fuerza de rozamiento estática \vec{f}_{re} que se opone y balancea o equilibra a \vec{F} y que actúa sobre la superficie del cuerpo que está en contacto con la mesa (Fig. 2.2 b). Si aumentamos la fuerza aplicada \vec{F} observamos que el cuerpo continuará en reposo hasta que \vec{F} tenga un valor máximo $f_{re\max}$ por encima del cual el cuerpo comenzará a moverse. Se observa experimentalmente que a partir de ese valor

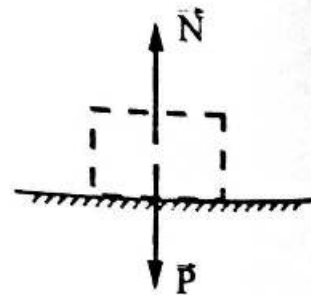


Fig. 2.2 a: \vec{P} y \vec{N} equilibradas.



Fig. 2.2 b: \vec{F} y \vec{f}_{re} .

$f_{m\acute{a}x}$, la fuerza de rozamiento cambia bruscamente a un valor menor f_{rd} , llamada fuerza de rozamiento dinámico. Podemos ilustrar lo dicho anteriormente graficando la fuerza de rozamiento $|f_r|$ en función de la fuerza tangencial aplicada $|\vec{F}|$ (*) (ver Fig. 2.2 e). En resumen, las fuerzas de rozamiento estático son aquellas que actúan sobre superficies en reposo entre sí, y tienen como valor máximo el igual a la fuerza exterior aplicada para iniciar el movimiento. En cambio las fuerzas de rozamiento dinámico actúan cuando hay movimiento relativo entre dos superficies.



Fig. 2.2 c: \vec{F}' y \vec{f}'_{re} .

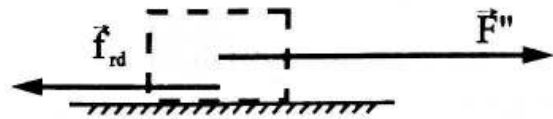


Fig. 2.2 d: \vec{F}'' y \vec{f}''_{rd} .

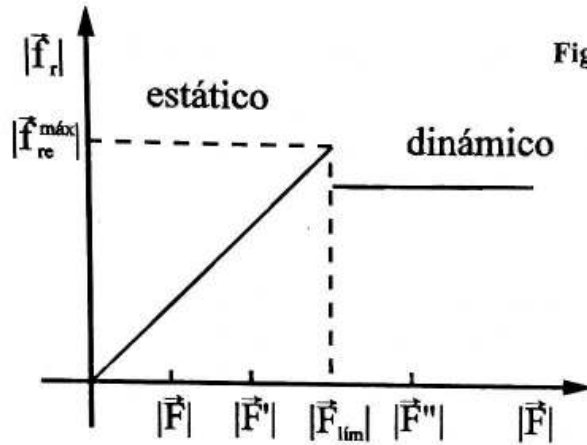


Fig. 2.2 e: Gráfico $|f_r| = |f_r|(|F|)$.

Se comprueba experimentalmente que la fuerza de rozamiento estático máxima entre superficies secas y no lubricadas es aproximadamente independiente del área de contacto y es proporcional a la fuerza normal.

$$|f_{re}^{m\acute{a}x}| = \mu_e |\vec{N}|$$

donde la constante de proporcionalidad μ_e es el coeficiente de rozamiento estático, que depende de la naturaleza de los materiales en contacto, del pulido de las superficies, de las películas superficiales, de la temperatura y del grado de contaminación, entre otros parámetros. La fuerza de rozamiento dinámica depende también del tipo y estado de las superficies en contacto, y de la fuerza con que se aprietan entre sí, pero no depende de las fuerzas tangenciales aplicadas y además es aproximadamente independiente de la velocidad relativa de las superficies.

El módulo de la fuerza de rozamiento dinámico es:

$$|f_{rd}| = \mu_d |\vec{N}|$$

donde μ_d es el coeficiente de rozamiento dinámico.

* En el gráfico de la Fig. 2.2e se observa que la fuerza de rozamiento dinámico es totalmente independiente de la fuerza aplicada, incluso en el caso de que esta valga cero.

TIPOS DE FUERZAS

F Los coeficientes μ_c y μ_d son constantes adimensionales (o sea números sin unidades) que relacionan los **módulos** de dos fuerzas.

S Generalmente $\mu_c > \mu_d$, esto significa que la fuerza de rozamiento estático es en muchos casos mayor, poco mayor, que la de rozamiento dinámico. Se lo puede comprobar sujetando una banda elástica a un objeto y remolcándolo sobre una mesa. Avanzará a tirones, aun cuando la mano se desplace uniformemente. Cada vez que el cuerpo se detiene, para reiniciar el movimiento es necesario más fuerza que la aplicada hasta entonces. La diferencia entre el rozamiento dinámico y el estático es lo suficientemente importante como para que se recomiende a los conductores de vehículos no clavar los frenos (*).

Debemos aclarar que la expresión $|\vec{f}_{rd}| = \mu_d |\vec{N}|$ constituye una aproximación, y no muy buena. Las aplicaciones profesionales más sencillas requieren tratamientos más complejos y rigurosos.

Describiremos ahora algunos ejemplos de aplicaciones de fuerzas de rozamiento.

Ejemplo 2.1a

Un cuerpo de masa M en reposo, está apoyado sobre un plano inclinado que forma un ángulo θ respecto de la horizontal. Si se aumenta el ángulo de inclinación se encuentra que para un cierto valor θ_c el cuerpo comienza a deslizarse sobre el plano. ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento estático μ_c entre el cuerpo y el plano?

Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son su peso $M\vec{g}$, la fuerza del plano sobre el cuerpo \vec{N} y la fuerza de rozamiento estática ejercida por la superficie sobre el cuerpo.

Todas las fuerzas están indicadas en la **Fig. 2.3**. Por claridad las representamos con sus puntos de aplicación separados, pero en este tratamiento el cuerpo se considerará como una partícula, y las tres fuerzas aplicadas en el mismo punto.

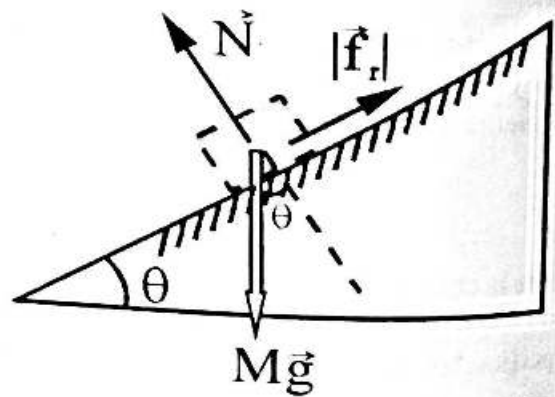


Fig. 2.3: Cuerpo apoyado en un plano inclinado.

* La fuerza de rozamiento de la rueda con el piso es mayor cuando no desliza. La frenada más efectiva es silenciosa aunque menos espectacular. En las curvas vale lo mismo y ciertos conductores avezados, aunque imprudentes, suelen aumentar la velocidad hasta que pequeños ruidos intermitentes y agudos le indican que no deben excederse, si desean mantener aplicada sobre el vehículo la fuerza centrípeta que requiere su movimiento.

Hay tipos de superficies en las que el rozamiento estático es menor que el dinámico (por ejemplo polietileno y madera). Curiosos efectos se observan en ciertas gomas siliconadas con las que se construyen juguetes en forma de pulpos o arañas. Estos deslizan de manera tan irregular como repulsiva cuando despegan una por una sus extremidades en el instante en que la velocidad relativa entre la goma y el plano se reduce lo suficiente.

Ejemplo 2.1:

Si consideramos las componentes en las direcciones perpendicular y tangencial al plano inclinado, tenemos

$$|\vec{N}| - M |\vec{g}| \cos \theta = 0$$

$$|\vec{f}_{re}| - M |\vec{g}| \sin \theta = 0$$

Además sabemos que $|\vec{f}_{re}| \leq \mu_e |\vec{N}|$, y que cuando aumentamos lentamente θ , justo en el momento en que el cuerpo comienza a deslizar el ángulo de inclinación tiene el valor θ_e , entonces $|\vec{f}_{re}^{max}| = \mu_e |\vec{N}|$, reemplazando en las expresiones anteriores obtenemos

$$\mu_e = \operatorname{tg} \theta_e$$

Hemos mostrado por lo tanto un método experimental para determinar el coeficiente de rozamiento estático mediante la medición del ángulo de inclinación para el cual un cuerpo empieza a deslizar sobre una superficie.

De forma análoga se puede comprobar que el ángulo de inclinación θ_d necesario para que un cuerpo deslice sobre un plano con velocidad constante es

$$\mu_d = \operatorname{tg} \theta_d$$

donde μ_d es el coeficiente de rozamiento dinámico.

Hasta aquí hemos reemplazado en las sumatorias a las componentes escalares de las fuerzas por + ó - los módulos de las mismas de acuerdo al sistema de referencia elegido. De ahora en adelante para simplificar la notación no usaremos las barras de módulos pero antepondremos el signo que corresponda, ejemplo:

$$\text{antes } |\vec{F}_1| - |\vec{F}_2| = (m_1 + m_2) a$$

$$\text{ahora } F_1 - F_2 = (m_1 + m_2) a$$

Ejemplo 2.2:

Analicemos el siguiente problema. Una persona arrastra por el suelo una canasta cuya masa es de 150 Kg, tirando de ella con una cuerda que está inclinada 30° con la horizontal. ¿Cuál debe ser la fuerza necesaria en la cuerda para empezar a mover la canasta si el coeficiente de rozamiento estático es de 0,50?

Las fuerzas aplicadas sobre la canasta están indicadas en la Fig. 2.4. Si escribimos a las fuerzas en términos de las componentes x e y tenemos.

$$\text{Según x: } F \cos \theta - f_{re} = 0$$

$$\text{Según y: } N + F \sin \theta - M |\vec{g}| = 0$$

Además la fuerza de rozamiento estático máximo es:

$$f_{re}^{max} = \mu_e N$$

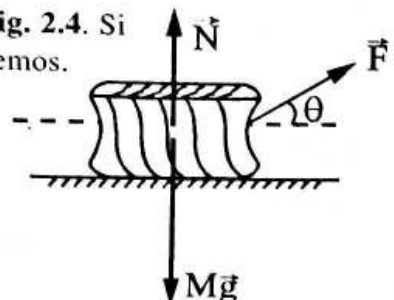


Fig. 2.4: Esquema de las fuerzas aplicadas a la Canasta.

Ejemplo 2.2:

Por lo tanto como

$$N = M |g| - F \text{ sen } \theta$$

y $f_{re} = \mu_e (M |g| - F \text{ sen } \theta)$; entonces

$$F \text{ cos } \theta - \mu_e (M |g| - F \text{ sen } \theta) = 0$$

de donde resulta, despejando F, que

$$F = \frac{\mu_e M |g|}{\text{cos } \theta + \mu_e \text{ sen } \theta}$$

Numéricamente

$$F = \frac{0,5 \cdot 150 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2}{\text{cos } 30^\circ + 0,5 \text{ sen } 30^\circ} = 658,6 \text{ N}$$

Cuando la canasta comienza a moverse el coeficiente de rozamiento toma el valor $\mu_d = 0,35$. Si la fuerza \vec{F} es aplicada continuamente, teniendo el valor calculado previamente, ¿cuál será la fuerza de rozamiento dinámico?

$$f_{rd} = \mu_d N = \mu_d (M |g| - F \text{ sen } \theta)$$

$$f_{rd} = 0,35 (150 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 - 658 \text{ N sen } 30^\circ)$$

$$f_{rd} = 399,2 \text{ N}$$

¿Cuál será en este caso la aceleración de la canasta?

Si planteamos según el eje y las ecuaciones escalares de la ley $\vec{F} = m \vec{a}$, obtenemos:

$$N + F \text{ sen } \theta - M |g| = 0$$

Pero según x tenemos

$$F \text{ cos } \theta - f_{rd} = m a$$

Reemplazando adecuadamente resulta que:

$$a = \frac{F \text{ cos } \theta - \mu_d (M |g| - F \text{ sen } \theta)}{m}$$

$$a = \frac{658,6 \text{ N cos } 30^\circ - 399,2 \text{ N}}{150 \text{ kg}}$$

$$a = 1,15 \text{ m/s}^2$$

Ejemplo 2.3:

Se tiene una plataforma circular que gira horizontalmente y sobre ella, a 5 m de su centro, se encuentra un bloque de $m = 10 \text{ kg}$. Entre la plataforma y el bloque el coeficiente de rozamiento estático vale $\mu_e = 0,5$. ¿Cuál es la velocidad máxima de rotación sin que el bloque deslice?

A medida que la plataforma gira, el bloque permanecería quieto, o se alejaría tangencialmente si ya tenía velocidad apropiada, si no se hicieran fuerzas sobre él.

No lo hace porque una fuerza centrípeta lo obliga a describir una circunferencia. En este caso dicha fuerza es la fuerza de rozamiento:

$$\mu_e m |g| = m \frac{v^2}{r} \quad \text{la fuerza máxima de rozamiento será:}$$

$$f_{re}^{\text{máx}} = \mu_e m |g|, \text{ de donde}$$

$$v = \sqrt{\mu_e |g| r} = \sqrt{0,5 \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 5 \text{ m}}$$

$$v = 5 \text{ m/s}$$

$$\omega = v/r = 1 \text{ s}^{-1}$$

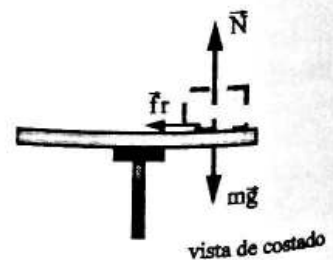
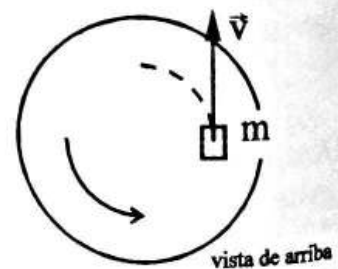


Fig. 2.5: Bloque sobre una plataforma circular.

2.1.2 VISCOSIDAD

Con el sólo objeto de hacer referencia a otro tipo de fuerzas de rozamiento, veremos en esta sección el llamado rozamiento interno o viscosidad. Este fenómeno se produce por las fuerzas de rozamiento que actúan entre dos capas paralelas de un fluido (gas o líquido) que se desplazan con distintas velocidades. El rozamiento interno se origina en la interacción entre átomos o moléculas de ambas capas. Se puede comprobar que esta fuerza es proporcional a la velocidad media de los átomos o moléculas.

Análogamente en el caso de un cuerpo que se mueve en el interior de un fluido, también aparecen fuerzas, producto de la interacción de la superficie del cuerpo con las moléculas del fluido que en determinados casos (velocidades pequeñas) son también proporcionales a la velocidad del cuerpo respecto al fluido

$$\vec{F} = -k \vec{v}$$

donde k es una constante que depende de la naturaleza del fluido y de la forma del cuerpo. En otras condiciones, esta fuerza es proporcional al cuadrado de la velocidad de desplazamiento.

Naturalmente, estas fuerzas se oponen a la velocidad y van creciendo a medida que crece ésta. Por ejemplo, un cuerpo en caída libre, inicialmente quieto, se desplaza por acción de la gravedad. A medida que su velocidad aumenta va también aumentando la resistencia que le ofrece el fluido en el cual se mueve (el aire). Y llega un momento (si la altura inicial es suficiente) en que esta resistencia iguala a la fuerza peso: a partir de ese momento el cuerpo continúa su caída con una velocidad constante que se conoce como "velocidad límite" *.

Aclaremos además que cuando decimos "llega un momento en que la velocidad es constante", en términos exactos ese momento no llega jamás. Si ocurre una aproximación indefinida en la que la velocidad (creciente en este ejemplo) tiende a una constante cuando el tiempo tiende a infinito.

2.2 FUERZAS ELASTICAS

Estudiaremos las propiedades de una interacción que es función de la separación entre los cuerpos que interactúan, como es el caso de la fuerza que un resorte estirado o comprimido, interpuesto entre dos cuerpos, ejerce sobre ellos.

La fuerza ejercida por un resorte es proporcional al estiramiento o compresión del mismo respecto de la posición de deformación nula x_0 (Fig. 2.6 a).

$$F_x = -k(x - x_0) \quad (1)$$

en donde $x - x_0$ puede ser negativo (resorte comprimido, Fig. 2.6 b) o $x - x_0$ puede ser positivo (resorte estirado, Fig. 2.6 c); las fuerzas en ambos casos son repulsiva y atractiva, respectivamente.

Todos los resortes que cumplen con la condición lineal dada por la expresión (1) son cuerpos elásticos (Fig. 2.6) que satisfacen la llamada ley de Hooke.

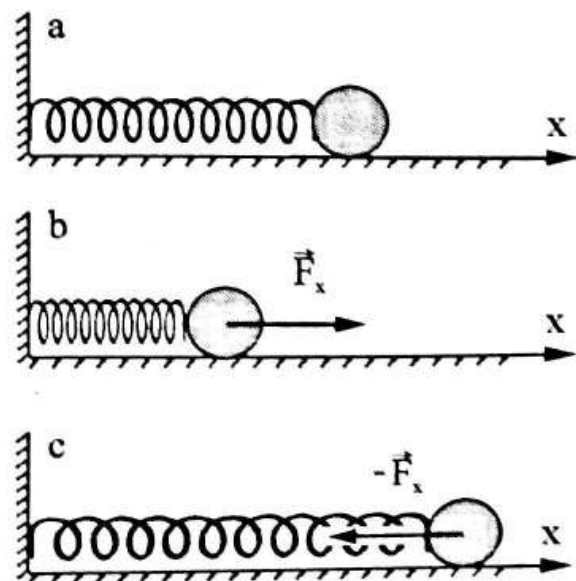


Fig. 2.6: Estiramiento y compresión de un resorte

*La variación de la velocidad para una caída en el aire se ha tratado en la Unidad I. Cinemática.

TIPOS DE FUERZAS

F
I
S
I
C
A Esta ley se verifica experimentalmente mientras el desplazamiento $x - x_0$ es pequeño.

Al describir el dinamómetro, en el Capítulo 1, suponíamos que el resorte repite los valores de estiramiento cuando se repiten los valores de la fuerza aplicada (en particular, si se retira la fuerza aplicada, el resorte recupera la forma de reposo, o neutra). Este comportamiento se conoce como perfectamente elástico, y en términos matemáticos equivale a afirmar que existe una posición es una función lineal (o sea que se representa con una recta y no otra curva), el resorte, además de ser perfectamente elástico, es lineal, o proporcional, y se dice que cumple la ley de Hooke. Para hacer un dinamómetro no es imprescindible la linealidad. En los ejercicios de este curso propondremos a menudo resortes lineales, por la razón de que la fuerza que ejercen es más fácil de calcular cuando la deformación, que si no fueran lineales.

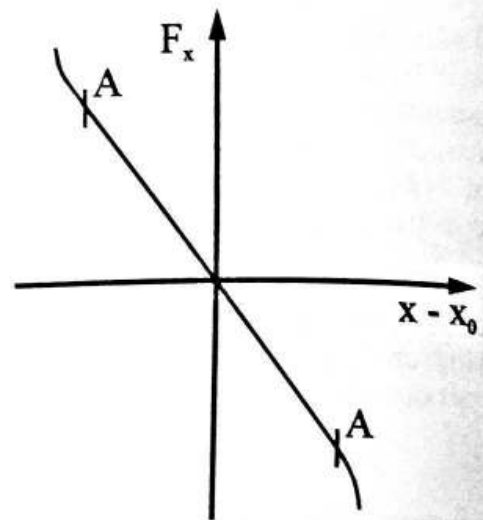


Fig. 2.7: Gráfico de F_x en función de $x - x_0$

Como se ilustra en la Fig. 2.7 (puntos A) los resortes dejan de ser lineales para desplazamientos grandes y hasta pueden dejar de ser elásticos.

Es bueno remarcar la propiedad fundamental de la interacción elástica en el sentido de que sólo depende de la naturaleza del mecanismo que provee la fuerza, es decir, la constante k y la separación entre los cuerpos r , y no depende de las propiedades de los cuerpos en interacción.

El ejemplo 2.7

Un resorte relajado tiene 0,3 m de longitud. Uno de sus extremos se fija a una pared y al otro se le aplica una fuerza de 50 N, produciendo un aumento de la longitud del resorte a 0,4 m. ¿Cuál es la constante elástica del resorte?

El módulo de la fuerza elástica es

$$F = k (x - x_0)$$

$$k = F / (x - x_0) \Rightarrow k = 50 \text{ N} / (0,4 - 0,3) \text{ m} \Rightarrow k = 500 \text{ N/m}$$

Ejemplo 2.8

Dos carritos A y B cuyas masas son $m_A = 5 \text{ kg}$ y $m_B = 8 \text{ kg}$ están unidos por un resorte que tiene una constante elástica $k = 400 \text{ N/m}$ y una longitud de $0,2 \text{ m}$ cuando está relajado. Inicialmente ambos carritos están en reposo sobre una pista horizontal. Se aplica una $F = 120 \text{ N}$ al carrito B como indica la Fig. 2.8.

La aceleración inicial del carrito B es

$$a = F/m_B = 120 \text{ N}/8 \text{ kg}$$

$$a = 15 \text{ m/s}^2$$

¿Cuáles son las aceleraciones de los carritos A y B, cuando el resorte tiene una longitud de $0,3 \text{ m}$?

La fuerza del resorte es

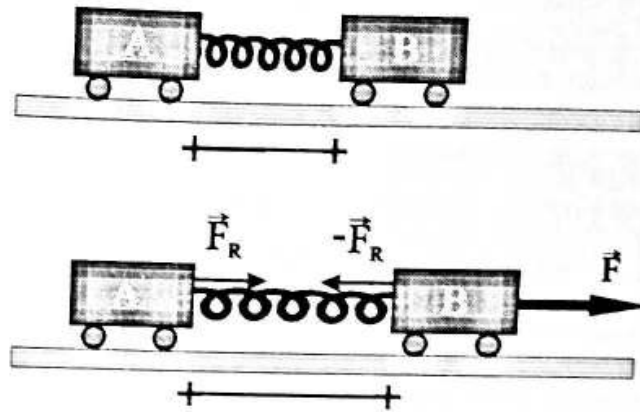


Fig. 2.8: Carritos A y B unidos por un resorte.

$$F_R = k(x - x_0) = (400 \text{ N/m})(0,3 \text{ m} - 0,2 \text{ m}) \Rightarrow F_R = 40 \text{ N}$$

Sobre el carrito A actúa sólo la fuerza del resorte, entonces la aceleración de A es

$$a_A = F_R/m_A = 40 \text{ N}/5 \text{ kg} \Rightarrow a_A = 8 \text{ m/s}^2$$

En cambio sobre el carrito B actúan la fuerza F y la del resorte en sentido contrario, por lo tanto la aceleración sobre B es

$$a_B = (F - F_R)/m_B = (120 \text{ N} - 40 \text{ N})/8 \text{ kg} \Rightarrow a_B = 10 \text{ m/s}^2$$

Note que originalmente el resorte no está deformado y por lo tanto no ejerce fuerza sobre los carritos. B comienza a moverse aceleradamente bajo la acción de F y estira el resorte, que aplica entonces $-F_R$ a A y F_R a B. El valor de F_R depende del estiramiento, y éste a su vez del tiempo, de modo que las aceleraciones de los carritos cambian en el tiempo. Aquí se las ha calculado para un instante (y separación) dado.

En la industria es frecuente hallar resortes con la llamada **precarga**. Se trata de resortes que deben esforzarse a la tracción hasta un cierto valor de fuerza, para que comiencen a separarse sus apretadas espiras. No funcionan a la compresión.

2.3 FUERZA GRAVITATORIA

Las propiedades de la fuerza gravitatoria fueron estudiadas por Newton a partir de datos experimentales sobre el movimiento de los planetas del sistema solar, descritos por las leyes empíricas de Kepler. Estas leyes afirman, en síntesis, que las órbitas son elipses, que el Sol está en uno de los focos de cada elipse, que la velocidad areolar de cada planeta es constante y otras relaciones, todas ciertas pero, aparentemente, desconectadas entre sí. Las tres leyes de Newton (acción y reacción, inercia y masa) y la de gravitación explican todas esas propiedades enunciadas antes por Kepler, pero también explican los movimientos de los cometas y los de los cuerpos que se dejan caer o se arrojan en las proximidades del suelo. Como leyes, tienen más jerarquía las de Newton que las de Kepler, a pesar de que ambas aciertan.

Newton generalizó sus resultados enunciando su famosa

Ley de Gravitación Universal

Dos partículas de masa m_1 y m_2 separadas una distancia $|r_{12}|$ se atraen por una fuerza que actúa a lo largo de la línea que une las dos partículas y cuyo módulo es

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{12}^2}$$

donde G es una constante universal cuyo valor no depende de las partículas que interactúan.

El físico inglés H. Cavendish determinó experimentalmente por primera vez el valor de la constante G en 1798, usando esferas de plomo de pocos centímetros de diámetro. El valor aceptado actualmente para la constante de gravitación es

$$G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$$

Debido al valor tan pequeño de G , la interacción gravitatoria entre cuerpos comunes sobre la superficie terrestre es despreciable, por ejemplo 2 esferas de 100 kg separadas 1 m se atraen con una fuerza

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

$$F = 6,7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \frac{100 \text{ kg} \cdot 100 \text{ kg}}{(1 \text{ m})^2}$$

$$F = 6,7 \cdot 10^{-7} \text{ N}$$

La Tierra, sin embargo, con su masa extraordinariamente grande, ejerce sobre todos los cuerpos cercanos a su superficie una fuerza gravitatoria intensa. Veamos:

Sea un cuerpo de masa m a una cierta altura h sobre la superficie terrestre: la fuerza que ejerce la Tierra sobre él será:

$$F = G \frac{m M_T}{(R_T + h)^2}$$

donde M_T y R_T son la masa y el radio de la Tierra respectivamente.

Por la segunda ley de Newton $F = m g$ donde g es la aceleración de la gravedad y por lo tanto

$$m g = G \frac{m M_T}{(R_T + h)^2}$$

Para cuerpos cercanos a la superficie, $h/R_T \ll 1$ y entonces

$$g \approx G \frac{M_T}{R_T^2}$$

Hemos visto en cinemática que $|g|$ cerca de la superficie es $9,81 \text{ m/s}^2$ y conociendo el radio de la Tierra $R_T = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$ podemos de la ecuación anterior encontrar su masa:

$$M_T \approx g \frac{R_T^2}{G}$$

$$M_T \approx \frac{(9,81 \text{ m/s}^2) (6,4 \cdot 10^6 \text{ m})^2}{6,7 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2}$$

$$M_T \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

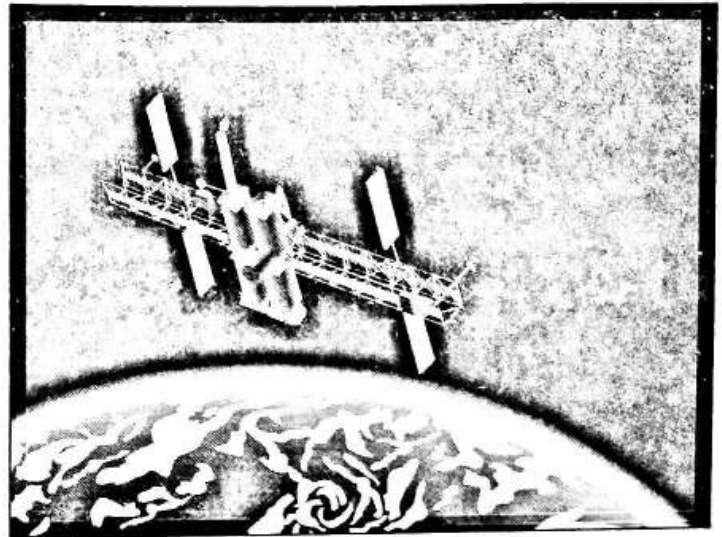


Fig. 2.9 a: satélite artificial orbitando.

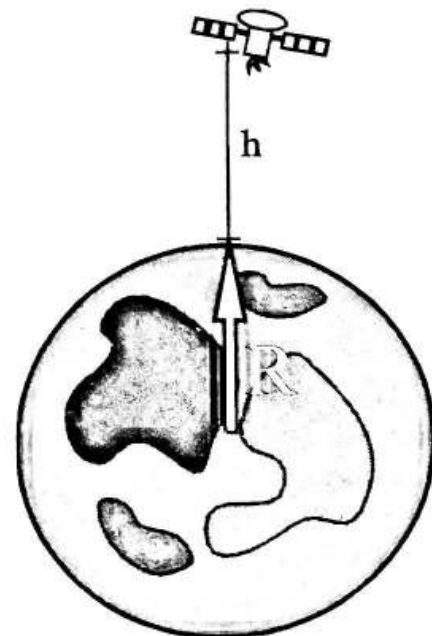


Fig. 2.9 b: Cuerpo a una altura h .

Ejemplo 2.9

El movimiento de los planetas en el sistema solar puede analizarse a partir de la ley de Gravitación Universal y las leyes de movimiento. Si bien en la realidad esas órbitas son en general elipses, nosotros estudiaremos en este curso el caso particular, aunque no menos instructivo, de órbitas circulares.

Consideremos un cuerpo de masa m en una órbita circular alrededor de otro de masa M mucho mayor que m ($M \gg m$) (por ejemplo, la Tierra y el Sol).

Como sabemos de la dinámica del movimiento circular, tendremos una fuerza centrípeta $f_c = m \omega^2 r$ que en este caso la provee la interacción gravitatoria, es decir:

$$G \frac{M m}{r^2} = m \omega^2 r \quad (*)$$

Expresando la velocidad angular en función del período de revolución T , será:

$$G M = \frac{4\pi^2}{T^2} r^3$$

de donde

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G M} = \text{constante} \quad (3^{\text{a}} \text{ ley de Kepler})$$

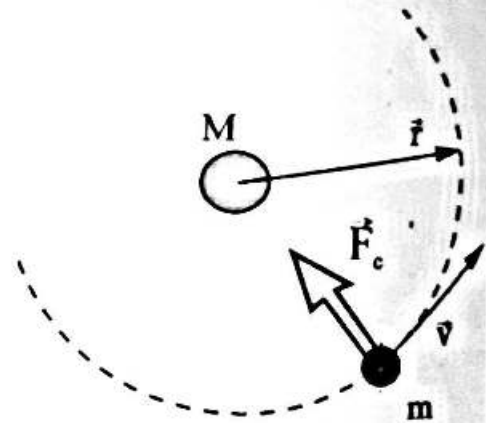


Fig. 2.10: Interacción gravitatoria entre M y m .

Ejemplo 2.11

De vital importancia para las comunicaciones son los satélites sincrónicos, que tienen un período orbital igual al período de rotación de la Tierra sobre su eje. Dicho satélite, puesto en órbita en el plano ecuatorial parecería como «colgado» en el mismo punto sobre la superficie terrestre. ¿A qué distancia debe orbitar un satélite de este tipo?

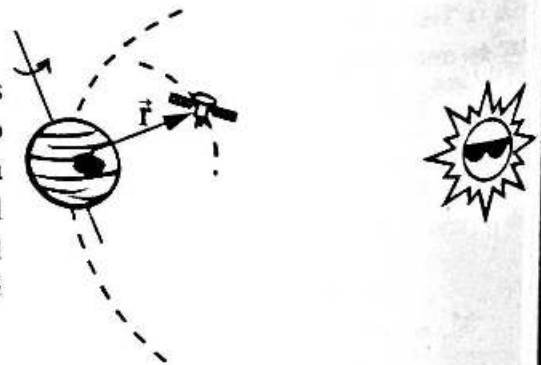


Fig. 2.11 a: Satélite artificial sincrónico.

* Es oportuno decir aquí que la fuerza centrípeta y la fuerza gravitatoria son la misma y única fuerza. A pesar de que tienen dos nombres no es que haya dos fuerzas aplicadas. Lo mismo sucede en otros ejemplos, con la fuerza de rozamiento, o la tensión de un hilo: todas ellas pueden ser centrípetas (solas o en conjunto). Debemos notar que la constante no depende de la masa del planeta, es decir que es la misma para cualquiera. Si se conocen el período y el radio de una órbita se puede obtener la masa del Sol.

Ejemplo 2.7:

Sabemos que
 $T = 24 \text{ hs}$
y por lo tanto de

$$r^3 = \frac{T^2}{(4 \pi^2 / G M_T)}$$

resulta

$$r \approx 42000 \text{ km}$$

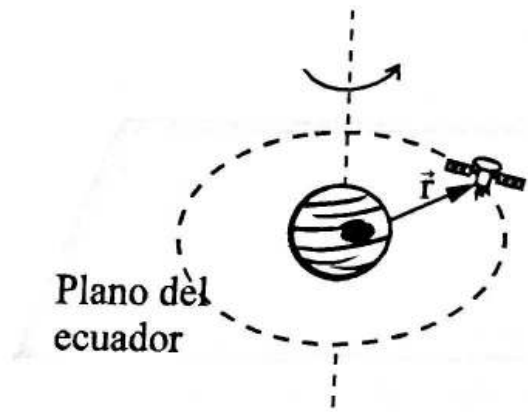


Fig. 2.11 b: Satélite artificial y sincrónico.

es decir aproximadamente a 36000 km de la superficie terrestre. En el año 1963 fue lanzado el primero de estos satélites y desde entonces, esa órbita sincrónica se ha poblado de numerosos artefactos de comunicaciones.

Ejemplo 2.8:

¿Cuál es la fuerza centrípeta que mantiene en órbita un satélite artificial de $m = 1000 \text{ kg}$ a 200 km de altura?. Si se toma como radio medio de la Tierra 6370 km, entonces el radio de la trayectoria del satélite será $R = 6570 \text{ km}$. Obsérvese que en este caso no hemos establecido la velocidad orbital pues este parámetro queda fijado al dar los otros datos. La fuerza centrípeta es ahora la fuerza gravitatoria, por lo que

$$F_c = G \frac{M_T m}{R^2} = m \frac{v^2}{R}$$

donde M_T es la masa de la Tierra (masa puntual)

La constante de gravitación universal $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$ y la masa de la Tierra es $5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

$$F_c = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2 \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 10^3 \text{ kg}}{\text{kg}^2 \cdot (6,57 \cdot 10^6 \text{ m})^2}$$

$$F_c = 9240,5 \text{ N}$$

¿y cuál es la velocidad orbital del satélite?. De la ecuación anterior sale que:

$$v = \sqrt{\frac{G M_T}{R}} = 7791,6 \text{ m/s}$$

lo que significa una velocidad angular de

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{7791,6 \text{ m/s}}{6,57 \cdot 10^6 \text{ m}} = 1,18 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

y, por lo tanto, una frecuencia de giro

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1,18 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}}{2\pi} = 1,88 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

Ejemplo 2.8:

Como el tiempo que tarda el satélite en realizar un giro es la inversa de f , este valor resulta de 5298 s, o sea una vuelta cada 1,47 hs.

Es interesante señalar que la velocidad orbital no depende de la masa del satélite, por lo que cualquier artefacto ubicado a 200 km de altura rodea la Tierra cada 1,47 hs, independientemente de su masa.

De acuerdo a las consideraciones anteriores, si fuera un astronauta al mando de una nave espacial que quiere acoplarse con otra, ¿basta con colocarse detrás de esta última en la misma órbita y acelerar hasta alcanzarla?

Ejemplo 2.9:

Si en una estación orbital de forma circular y de 100 m de radio se quiere simular una atracción gravitacional igual a la terrestre, ¿cuál debe ser la velocidad de giro de la misma? En la figura se representa dicha estación y el eje de giro. Un astronauta parado sobre un borde lateral como se indica, recibe sobre sus pies la acción de una fuerza centrípeta que produce el vínculo, dada por la rotación a velocidad v (el efecto es similar al del tambor del lavarropas visto en un ejemplo anterior). Lo que se requiere es que la F_c sea igualmente intensa que el peso normal de la persona cuando está en la Tierra.

$$F_c = m \frac{v^2}{r} = m g$$

$$\frac{v^2}{r} = g \Rightarrow v = (g r)^{1/2} \Rightarrow$$

$$v = (10 \text{ m/s}^2 \cdot 100 \text{ m})^{1/2} \Rightarrow$$

$$v = 31,62 \text{ m/s}$$

o que implica que $\omega = 0,316 \text{ s}^{-1}$

y $f = \omega/2\pi \Rightarrow f = 0,05 \text{ s}^{-1}$

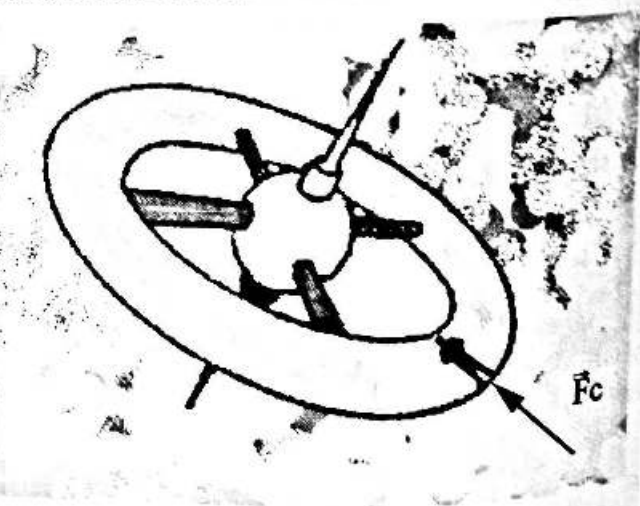


Fig. 2.12: Estación orbital.

o sea 1 vuelta cada 20 segundos.

Ejemplo 2.10

En los extremos de un resorte se colocan dos esferas de masa $M = 10000 \text{ kg}$ y radio $R = 1 \text{ m}$. Debido a la interacción gravitatoria entre las esferas el resorte se comprime, queremos calcular cuánto se comprimió.

$$K = 0,05 \text{ N/cm}$$

$$L = 3 \text{ cm}$$

La fuerza de interacción gravitatoria entre las esferas será

$$F = G \frac{M \cdot M}{(2R + L')^2} \quad (1)$$

donde $2R + L'$ es la distancia entre sus centros y, como se indica en la Fig. 2.13, L' es la longitud de equilibrio final del resorte comprimido.

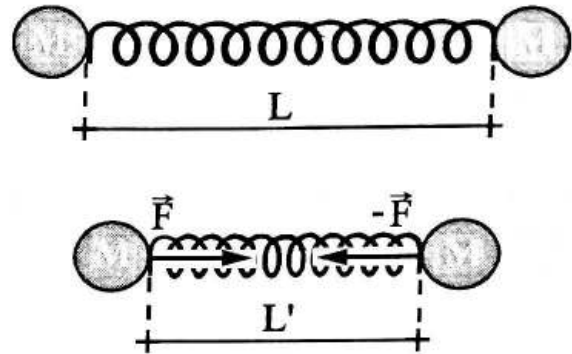


Fig. 2.13: Esferas unidas a los extremos de un resorte.

Para el equilibrio, esta fuerza atractiva debe ser compensada por la fuerza elástica del resorte:

$$F = K \Delta L, \quad \text{con } \Delta L = L - L' \text{ (longitud de compresión)}$$

y de (1) podemos escribir

$$G \frac{M^2}{(2R + L')^2} = K \Delta L \Rightarrow G M^2 = K \Delta L (2R + L - \Delta L)^2$$

de donde podemos, matemática mediante, despejar el valor de ΔL , conocidos los valores de los otros parámetros. Sin embargo, la ecuación obtenida es cúbica en ΔL (es decir, aparecen las potencias ΔL^3 , ΔL^2 , ΔL) y su solución matemática no es sencilla. Para ejemplificarla, observemos que las fuerzas gravitatorias entre objetos de masas no muy grandes (comparadas con las astronómicas) son pequeñas. Entonces parece razonable esperar que el resorte se comprima muy poco, y que $\Delta L \ll L$. Adoptamos esta condición como hipótesis y observamos, del cálculo posterior, si es justificable:

$$\Delta L \ll L \quad 2R + L - \Delta L \approx 2R + L \quad G M^2 \approx K \Delta L (2R + L)^2$$

y entonces
$$\Delta L \approx \frac{G M^2}{K(2R + L)^2}$$

y reemplazando valores:

$$\Delta L \approx 0,033 \text{ m}$$

Se observa que $\Delta L \ll L = 3 \text{ cm}$ y nuestra aproximación está justificada.

2.3.1 LA LEY DE GRAVITACION Y SU EXPRESION VECTORIAL

Consideremos un sistema de referencia y dos partículas de masas m_1 y m_2 como se indica en la Fig. 2.14.

La Fuerza F_{21} ejercida por m_1 sobre m_2 será.

$$\vec{F}_{21} = -G m_1 m_2 \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3}$$

el signo menos significa que \vec{F}_{21} está dirigida hacia m_1 , es decir, es atractiva. De la misma manera

$$\vec{F}_{12} = -G m_1 m_2 \frac{\vec{r}_{21}}{|\vec{r}_{21}|^3}$$

y como:

$$\vec{r}_{21} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = -(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -\vec{r}_{12}$$

tenemos $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ como esperábamos, pues las fuerzas \vec{F}_{12} y \vec{F}_{21} forman un par de acción y reacción.

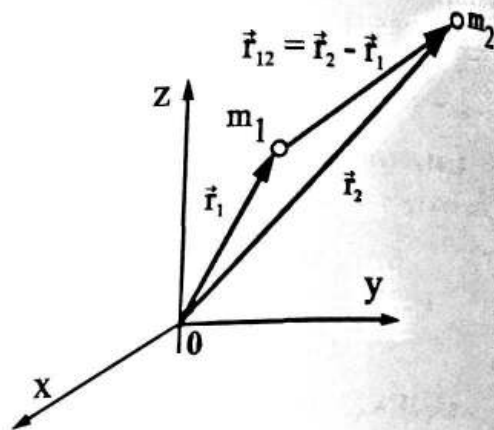


Fig. 2.14: Posiciones relativas de m_1 y m_2 respecto de un sistema de referencia.

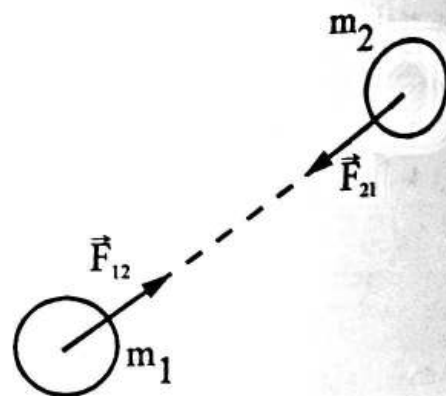


Fig. 2.15: Fuerzas de interacción gravitatoria.

2.4 OTRAS FUERZAS FUNDAMENTALES DE LA NATURALEZA

2.4.1 FUERZAS ELECTROSTATICAS

Hemos visto varios tipos de fuerza que, por experiencias cotidianas nos resultan muy familiares y nos referiremos a una más. Seguramente alguna vez, hemos frotado una regla de plástico contra el cabello o la ropa y vimos cómo pequeños papelitos eran atraídos por la regla. La naturaleza de esta fuerza es eléctrica. La experiencia nos demuestra que los cuerpos pueden estar o no cargados y que existen dos tipos de cargas (negativas y positivas: exceso de electrones o falta de ellos). Sean q_1 y q_2 las cargas de dos partículas separadas una distancia r , el físico francés Coulomb demostró

el siglo pasado que la fuerza de interacción entre estas dos cargas está dada por

$$F = K \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Observe que la dependencia con la distancia r es de la misma forma que la interacción gravitatoria: En el sistema MKS la unidad de carga es el Coulomb (C), y la constante K de la ley de Coulomb vale $9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2$.

A pesar de que, para nuestros ojos, la materia es eléctricamente neutra, en su interior la fuerza eléctrica es la que mantiene sus constituyentes (los átomos) unidos. Si bien la interacción gravitatoria está siempre presente, ésta es muy pequeña, en los tamaños atómicos, comparada con la fuerza eléctrica. Para demostrar esto, comparemos la atracción gravitatoria entre un electrón y un protón con la atracción coulombiana:

$$m_p = 1840 m_e \text{ y } q_p = +q_e; \quad m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg y } q_e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

y por lo tanto

$$\frac{\text{Atracción Gravitatoria}}{\text{Repulsión Coulombiana}} \approx 10^{-39}$$

Aunque en este curso nos hemos referido a las fuerzas elásticas y de contacto como si fueran de diferente tipo que las electrostáticas, la verdad es que a escala microscópica todas ellas son fuerzas del mismo tipo y son de origen eléctrico. Cuando apoyamos un objeto sobre una mesa, es la repulsión electrostática entre los electrones la que mantiene suspendido al objeto. Un fuerte puñetazo no es más que un conjunto de interacciones electromagnéticas.

2.4.2 FUERZAS NUCLEARES

Concluimos esta sección con una breve discusión de las fuerzas nucleares. Aunque las fuerzas eléctricas mantienen unidos a los átomos, ellas por sí solas no permitirían la existencia de los núcleos atómicos puesto que los protones al tener la misma carga se repelerían. Las fuerzas nucleares, provistas por la llamada «interacción fuerte», son las que mantienen unidos a los protones y neutrones en un núcleo. Sabemos que existen, conocemos aproximadamente su rango, 10^{-15} m que es justamente el orden del tamaño de los núcleos, pero nadie hasta ahora ha podido encontrar su dependencia con u otros parámetros. Dentro de ciertas aproximaciones, esta fuerza nuclear es del tipo

$$F \approx \frac{1}{r^2} e^{-r/r_0} \quad r_0 \approx 10^{-15} \text{ m}$$

Para terminar, comparemos en una tabla las magnitudes de las diferentes fuerzas entre protones separados una distancia de 10^{-15} m .

Interacción	Magnitud de la Fuerza
Gravitatoria	10^{-34}
Coulombiana	10^2
Fuerte	10^3