4.1 INTRODUCCION

Hasta el momento decíamos (de los móviles o partículas) que se movían con velocidad constante o variable, que permanecían en reposo, o que se aceleraban, y aclarábamos o dábamos por sobreentendido que lo hacían respecto de las rutas, localidades, en definitiva, respecto de la Tierra.

Sin embargo, hay casos en que nosotros, automáticamente, usamos otros sistemas de referencia que no son la Tierra; por ejemplo, le decimos a un niño que viaja en tren a nuestro lado que se quede quieto. La única forma en que la criatura puede cumplir con nuestro deseo sería arrojándose por la ventanilla o correr hacia el furgón de cola a 95 km/h (no era esa nuestra intención), y por más que se tranquilice, no podrá hacer otra cosa que seguir moviéndose a 95 km/h, junto con el tren y demás pasajeros adultos. En este caso, sin darnos cuenta, usamos el sistema de referencia fijo al tren, aunque jamás oiremos que el tren se encuentra quieto, dicho por un pasajero, a menos que efectivamente esté detenido con respecto a la Tierra.

La condición de movimiento - o falta de él - es, pues, relativa a los sistemas de referencia, seamos o no conscientes de ello al hacer nuestras afirmaciones. Moverse no es algo propio de un cuerpo, sino algo que concierne a ***dos*** cuerpos.

No es fácil convencer a nadie de que la montura de un potro indómito está en reposo, si se elige un sistema de referencia adecuado, mientras que la Tierra, con sus árboles e instalaciones, se sacude hacia uno y otro lado. Efectivamente, aunque teóricamente podría hacerse tal afirmación, no es frecuente hacerla, ni práctico.

Ya que en este tema constantemente decimos **relativa/o a...** y puede confundirse con **relatividad**, que quede claro que esto ***no*** es la teoría de la relatividad de Einstein. La relatividad einsteniana no forma parte del presente curso, y sólo podemos adelantar que se ocupa también de la relatividad de los movimientos y demás descripciones de fenómenos, y que tiene especial importancia cuando se consideran velocidades comparables con la de la luz (300.000 km/s). En este curso nos referiremos sólo a casos de velocidades comparativamente pequeñas, donde la relatividad de Einstein puede no tenerse en cuenta.

Parece que lo más práctico consiste en utilizar a la Tierra como referencia universal, si no fuera porque, entre otras cosas, también deseamos decir a veces que la Tierra se mueve. Ninguna dificultad habrá si decimos respecto de qué (del Sol, de las estrellas, etc.). Según este enfoque relativista, la discusión entre Galileo y la inquisición sobre si la Tierra se mueve o no lo hace, parecería - por ahora - carecer en absoluto de significado, al no haber referencia a sistema patrón alguno. Por entonces consideraban que la quietud o el movimiento eran atributos de cada cuerpo y no de pares de ellos. Cuando decían **se mueve o no se mueve** no mencionaban otro cuerpo. Es más, dejaban entrever que tenían la idea de un espacio absoluto que serviría como sistema de referencia universal, aunque no lo decían en forma explícita.

Como es fácil imaginar, la descripción de un movimiento depende del sistema de referencia que se utilice: el movimiento de la púa fonográfica sobre un disco, respecto del disco, sigue una trayectoria en forma de espiral plana, cuya longitud podría estimarse en 300 m, que la púa recorre totalmente a una velocidad variable. En cambio, respecto de la habitación, el movimiento de la púa consiste en un arco de círculo de no más de 25 centímetros de recorrido, y con una velocidad de módulo constante.

No sólo la descripción de la trayectoria cambia con el sistema de referencia; también lo hacen la velocidad y aceleración.

4.2 LA TRANSFORMACION DE GALILEO

Consideremos dos sistemas de referencia, y que uno de ellos se mueve con respecto al otro de modo que su origen hace un movimiento rectilíneo uniforme y sus ejes mantienen siempre la misma orientación. A ese movimiento se lo llama **Traslación Uniforme**.

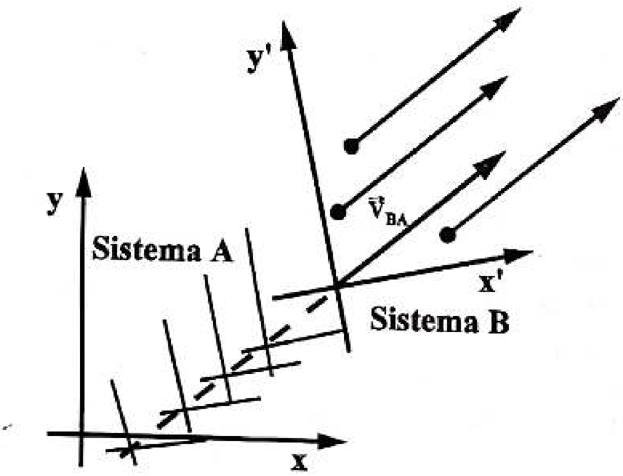


Fig. 4.1: Traslación uniforme del sistema B respecto del A. Todos los puntos de B tienen la misma velocidad constante $\vec{v}_{AB}$.

Todos los puntos de B se mueven con velocidad $\vec{v}_{BA}$ que es la **velocidad de B respecto de A**. Recíprocamente A se mueve con respecto a B con velocidad $\vec{v}_{AB} = -\vec{v}_{BA}$ donde el signo menos indica que $\vec{v}_{AB}$ es opuesta a $\vec{v}_{BA}$.

Supongamos ahora una partícula ubicada en un punto P del espacio, de la cual conocemos su vector posición $\vec{r}_{PB}$ y su velocidad $\vec{v}_{PB}$ en un instante dado, medidos con respecto al sistema de referencia B, ver **Fig. 4.2**.

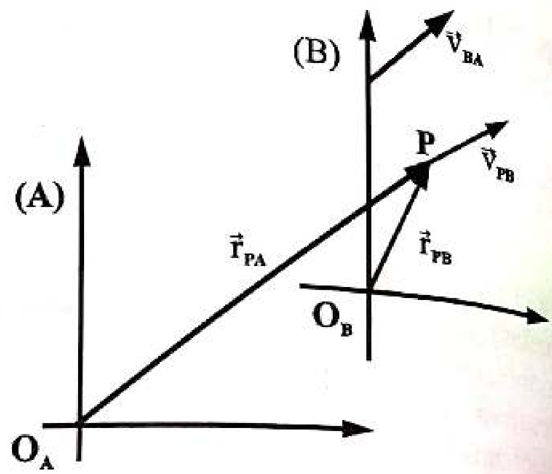


Fig. 4.2: Observación del punto P desde dos sistemas de referencia: A y B.

Medida desde A la posición es otra, aunque su ubicación física en el espacio es la misma, ya que el vector posición que ahora señala la partícula P desde O_A es $\vec{r}_{PA}$.

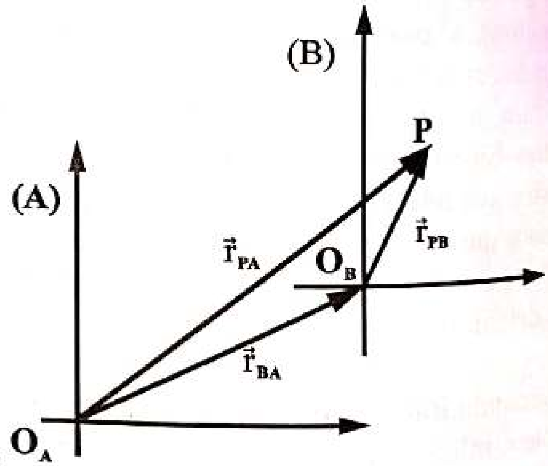


Fig. 4.3: Transformación de coordenadas de un sistema a otro.

Si observamos la **Fig. 4.3**, resulta

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{BA} + \vec{r}_{PB}$$

de esta manera se vinculan las posiciones en ambos sistemas.

Analicemos qué ocurre a medida que transcurre el tiempo. Si la partícula se mueve con respecto a B y además el sistema se mueve con respecto a A, los vectores posición cambiarán, tal que para un instante t' la posición del punto P respecto del sistema A será:

$$\vec{r}'_{PA} = \vec{r}'_{BA} + \vec{r}'_{PB}$$

Podemos hallar los desplazamientos

$$\Delta\vec{r}_{PA} = \Delta\vec{r}_{BA} + \Delta\vec{r}_{PB} \qquad (2)$$

con

$$\Delta\vec{r}_{PA} = \vec{r}'_{PA} - \vec{r}_{PA}$$
$$\Delta\vec{r}_{PB} = \vec{r}'_{PB} - \vec{r}_{PB}$$
$$\Delta\vec{r}_{BA} = \vec{r}'_{BA} - \vec{r}_{BA}$$

Si consideramos el intervalo de tiempo empleado para estos desplazamientos, podremos calcular:

$$\frac{\Delta\vec{r}_{PA}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}_{BA}}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{r}_{PB}}{\Delta t}$$

de acuerdo a lo visto anteriormente estas son velocidades medias, pero como ya sabemos pueden definirse también las instantá

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{BA} + \vec{v}_{PB} \qquad (3)$$

Hemos obtenido así la ***ley de adición de velocidades***, que nos dice cómo se transforman las velocidades de un sistema a otro.

Esta regla nos dice que si conocemos la velocidad de la partícula según B y le sumamos la velocidad del sistema B respecto de A (***velocidad de arastre*** del sistema B) obtenemos la velocidad según el sistema A (o a la inversa). La suma debe ser vectorial.

Haciendo un procedimiento análogo al anterior, podríamos ver cómo se transforman las aceleraciones, de un sistema a otro, tomando un intervalo de tiempo Δt y registrando los cambios de velocidad de la partícula en ese intervalo.

$$\frac{\Delta\vec{v}_{PA}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}_{BA}}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{v}_{PB}}{\Delta t}$$

Si, como dijimos, todos los puntos del sistema B tienen la misma velocidad **constante**, entonces:

$$(\Delta v_{BA} / \Delta t) = 0$$

lo cual implica $\vec{a}_A = \vec{a}_B$ (4)

Las ***aceleraciones son las mismas en ambos sistemas*** (aunque no lo sean las respectivas velocidades).

Supongamos ahora, en cambio, que el sistema B se mueve de tal manera que su origen hace un movimiento rectilíneo uniformemente variado y sus ejes mantienen siempre la misma orientación. (Por supuesto, existen otros movimientos posibles de B con respecto a A, aparte de los dos ya dichos, pero no serán tratados en nuestro curso. Son, por ejemplo, rotaciones y traslaciones curvilíneas).

Luego, podemos usar

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{BA} + \vec{a}_{PB} \qquad (5)$$

Las expresiones (4) y (5) son de una enorme trascendencia y veremos sus implicaciones luego, en la Unidad 2 que corresponde a dinámica.

Hemos hablado de cómo se transforman posiciones, velocidades y aceleraciones, pero nada dijimos del tiempo, aunque cuando tomamos intervalos de tiempo para calcular las velocidades medias, simplemente dividimos por Δt todos los términos de la expresión (2), sin discriminar entre Δt_A y Δt_B. Al no hacer distinciones entre Δt_A y Δt_B estamos afirmando que el tiempo transcurre igualmente desde ambos sistemas de referencia. Aunque parezca extraño, esta afirmación no es válida para velocidades grandes, comparables con la de la luz. Pero para velocidades ordinarias es correcto decir $\Delta t_A = \Delta t_B$, y escribir explícitamente la llamada Transformación de Galileo:

$$\vec{r}_A = \vec{v}_{BA}\, t + \vec{r}_B$$
$$t_A = t_B$$

que permite calcular posiciones y tiempos en el sistema A conociendo posiciones y tiempos en el sistema B.

O sea con estas últimas y con las (3) y (5) podemos describir los movimientos del chico, camine corra salte se quede quieto o no, dentro de un tren que se desplaza uniformemente o aceleradamente por un tramo de vía recta; respecto de cualquier pasajero sentado o desde el andén de alguna estación, etc.

Veamos dos ejemplos, el primero de aplicación de este capítulo y el segundo para relacionar encuentros con movimiento relativo.

Ejemplo 4.1:

Un bote cruza un río de 30 m de ancho con una velocidad cuyo módulo es de 4 m/s con respecto al agua y orientado de tal forma que, si las aguas estuviesen en reposo, cruzaría perpendicularmente a las orillas. El bote parte de un punto O, ubicado sobre una de las orillas y llega a otro punto B ubicado sobre la otra orilla, distante 50 m. ¿Cuál es la velocidad del agua?

(Pista: Se trata de un cuerpo que es arrastrado, en su movimiento por un sistema que se mueve: el agua)

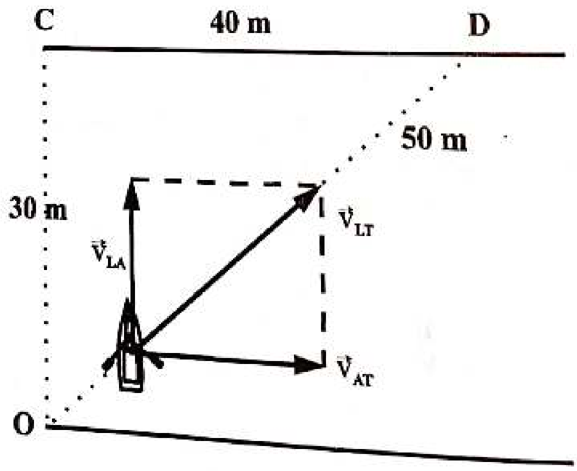


Fig. 4.4: Esquema descriptivo de la situación planteada.

Una forma sencilla de no equivocarse y no forzar la memoria es escribir la fórmula vectorial de transformación de velocidades la siguiente manera

$$\vec{v}_{AB} + \vec{v}_{BC} + \vec{v}_{CA} = 0 \qquad (6)$$

Note la rotación de los subíndices: AB, BC, CA. Se trata de una expresión muy simétrica y fácil de entender y recordar. En cuanto a A, B y C, son lo que uno desee: el sistema A, el B, el cuerpo, la lancha, lo que haga falta: siempre funciona bien.

Ejemplo 4.1:

Recordando esta otra expresión:

$$\vec{v}_{DE} = -\vec{v}_{ED}$$

que nos dice que si intercambiamos los subíndices debemos invertir el sentido del vector, que la velocidad del objeto D respecto del E es opuesta a la velocidad de E respecto de D.

Hecha esta introducción, elegimos:

A: Agua T: Tierra L: Lancha

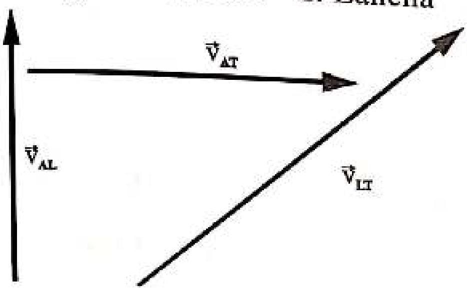


Fig. 4.5: Vectores útiles para la resolución del problema.

Para poder aplicar la igualdad (6) necesitamos poner algo así como

$$\vec{v}_{AT} + \vec{v}_{TL} + \vec{v}_{LA} = 0$$

pero hemos dibujado $\vec{v}_{LT}$ y no $\vec{v}_{TL}$.

Invertimos, pues el sentido del vector al tiempo que intercambiamos los subíndices:

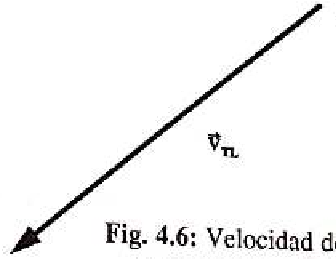


Fig. 4.6: Velocidad de la Tierra con respecto a la lancha.

Ahora sí aplicamos $\vec{v}_{AT} + \vec{v}_{TL} + \vec{v}_{LA} = 0$

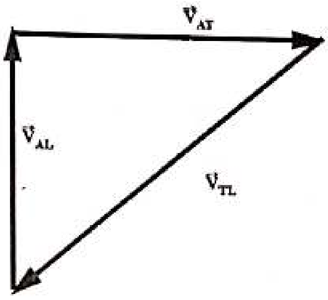


Fig. 4.7: Los tres vectores suman cero, pues forman un polígono cerrado.

Por semejanza

$$\frac{40\,m}{30\,m} = \frac{v_{AT}}{4\,m/s} \quad \therefore \quad \boxed{v_{AT} = 5{,}33\,m/s}$$

Ejemplo 4.2:

Resolvamos ahora nuevamente el problema de encuentro (Ejemplo 2.1) pero desde un sistema de coordenadas sobre el automóvil que sale de Bs. As. En tal caso la posición de este automóvil será simplemente $x_1(t) = 0$ para todo instante de tiempo. El segundo automóvil se moverá uniformemente con velocidad $\vec{v}_{21}$ respecto de nuestro sistema de referencia (y del primer automóvil) partiendo de una posición inicial $x_2(0) = d$. La ecuación de movimiento es: $x_2(t) = d + v_{21}\,t$; y la velocidad v_{21} resulta de la superposición de la velocidad del segundo automóvil respecto de la tierra ($-v_2$: observe la dirección del eje +x) y la velocidad de la Tierra respecto del primer automóvil ($-v_1$: observe que la Tierra se mueve hacia -x).

Entonces $\vec{v}_{21} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, tal que:

$v_{21} = -(v_1 + v_2)$ y las ecuaciones de movimiento de ambos móviles son

$$x_1(t) = 0$$

$$x_2(t) = d - (v_1 + v_2)\,t$$

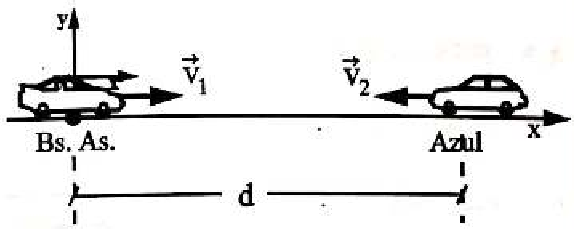


Fig. 4.8: Esquema de las condiciones iniciales con el sistema de referencia elegido.

Ejemplo 4.2:

En el instante de encuentro:

$$t = t_e \Rightarrow x_1(t_e) = x_2(t_e) = 0$$

$x_1(t_e) = 0$ se cumple inmediatamente, de modo que la condición de encuentro se reduce a que el segundo coche llegue al origen de coordenadas:

$$d - (v_1 + v_2)t_e = 0 \Rightarrow t_e = \frac{d}{(v_1 + v_2)} = 2h$$

que es la misma solución hallada anteriormente. El automóvil que partió desde Bs. As. reccorrió hasta ese instante la misma distancia que Bs. As. «viajó» respecto del origen de coordenadas. La ecuación de movimiento de Bs. As. será:

$$x_{BA}(t) = -v_1 t \Rightarrow$$
$$x_{BA}(t_e) = -v_1 t_e = \frac{-v_1 d}{(v_1 + v_2)} = -160\text{km}$$
$$x_{BA}(t_e) = -160\text{km}$$

¿Y Azul? Azul se mueve con igual velocidad que Bs. As. (la Tierra es rígida en ese movimiento) y «parte» a una distancia d del origen de coordenadas. Su ècuación de movimiento es:

$$x_{AZ}(t) = d - v_1 t \Rightarrow$$
$$x_{AZ}(t_e) = d - v_1 t_e =$$
$$= d + x_{BA}(t_e) = 140\text{km}$$

Si se coloca el sistema de coordenadas en el otro automóvil, manteniendo el sentido del eje x, las ecuaciones de movimiento de los móviles son:

$$x_1(t) = -d + (v_1 + v_2)t$$
$$x_2(t) = 0$$

(dedúzcalas)

Como antes

$$t_e = \frac{d}{(v_1 + v_2)}$$
$$x_{BA}(t) = -d + v_2 t \Rightarrow x_{BA}(t_e) = -160\text{km}$$
$$x_{AZ}(t) = v_2 t \Rightarrow x_{AZ}(t_e) = 140\text{km}$$

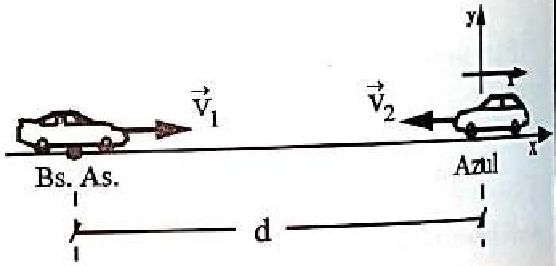


Fig. 4.9: Esquema de las condiciones iniciales pero con otro sistema de referencia.

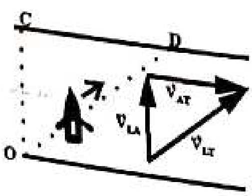
Observe que en ambos casos las respectivas posiciones de las ciudades en el instante del encuentro coinciden, dado que en ese instante ambos sistemas coordenados se superponen (como los móviles).

Analice qué ocurre en el caso en que los automóviles viajan en el mismo sentido.

4.3 RESUMEN

Transformación de Galileo

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{AB} t + \vec{r}_{PB}$$
$$t_A = t_B$$
$$\vec{r}_{BA} = \text{cte.} \Rightarrow \vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB}$$



Cuando el sistema B se traslada con movimiento rectilíneo uniformemente variado respecto del sistema A

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{BA} + \vec{a}_{PB}$$

Y por último no olvidemos:

$$\vec{v}_{AT} + \vec{v}_{TL} + \vec{v}_{LA} = 0$$

5.1 ECUACIONES HORARIAS

TIRO OBLICUO

Hasta aquí hemos visto movimientos rectilíneos, en donde los vectores velocidad y aceleración son colineales (tienen la misma dirección). Sin embargo, hay casos donde esto no ocurre, y entonces el movimiento se realiza en una trayectoria curva. Un ejemplo simple es el llamado tiro oblicuo donde el vector aceleración es constante pero no es colineal con la velocidad.

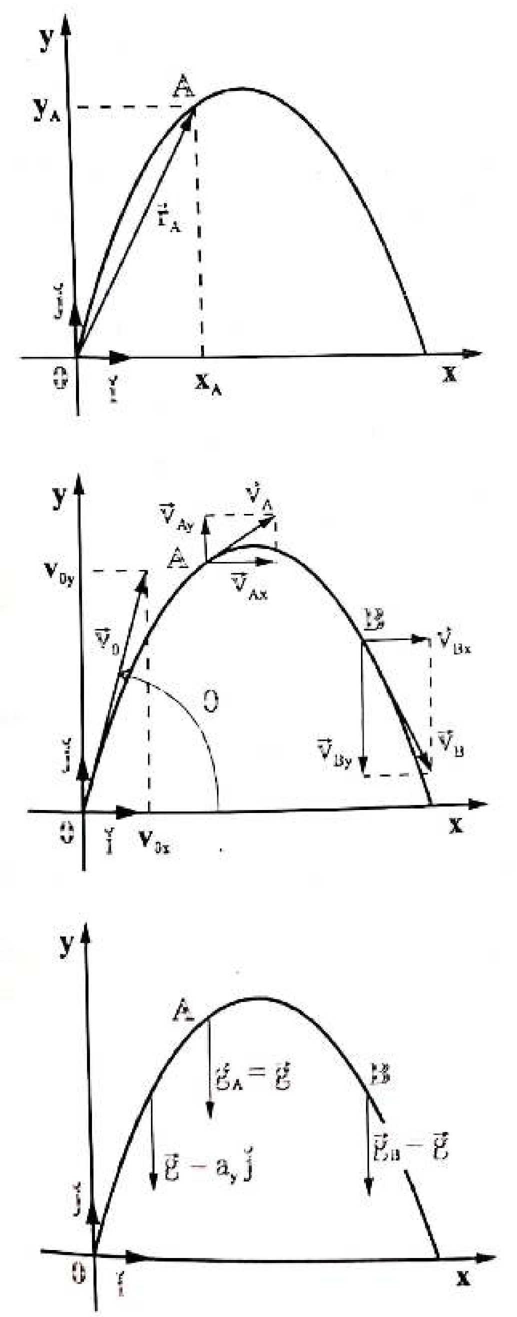


Fig. 5.1: a), b), c)

El lanzamieno de la pelota por elevación de un tiro libre en el fútbol, la aspersión de agua para riego, etc., son ejemplos de movimientos curvilíneos, bidimensionales de partículas que se mueven con la aceleración g (sin tener en cuenta la influencia del aire) que, como dijimos anteriormente, es un vector cuya dirección es vertical, su sentido hacia el centro de la Tierra y su módulo es constante y tiene el valor de 9,81 m/s^2 aproximadamente.

Las **Fig. 5.1** a), b) y c) ilustran el movimiento de una partícula que se mueve con una trayectoria curva en el plano x-y. El vector $\vec{r}_x = x_x\,\vec{i} + y_x\,\vec{j}$ mide la posición o el desplazamiento a partir del origen de un sistema de referencia elegido (arbitrariamente) de tal forma que el eje positivo de las **y** está dirigido verticalmente hacia arriba.

La **Fig. b)** muestra el vector velocidad instantánea $\vec{v}_x = v_{xx}\,\vec{i} + v_{xy}\,\vec{j}$ que es tangente a la trayectoria en el punto A, y a $\vec{v}_B$, en general como ya sabemos la dirección de la $\vec{v}$ de la partícula es tangente en todos los puntos a la trayectoria.

Y como hemos señalado anteriormente, el vector aceleración $\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j}$, tiene componentes $a_x = 0$, $a_y = -|g|$ como se observa en la **Fig. c)**, además de $\vec{g}_x$ y $\vec{g}_B$ que son iguales a $\vec{g}$.

FÍSICA

Debemos recordar que estamos estudiando el movimiento de una partícula en un plano y que los vectores posición $\vec{r}$, velocidad $\vec{v}$ y aceleración $\vec{a}$ son funciones del tiempo al igual que sus correspondientes componentes, es decir:

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} \quad \text{(recordar que } \mathbf{i} = \hat{\imath} \text{...)}$$

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\,\mathbf{i} + v_y(t)\,\mathbf{j}$$

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\,\mathbf{i} + a_y(t)\,\mathbf{j}$$

Estas últimas expresiones contienen importante información y a partir de las mismas deduciremos las ecuaciones horarias del tiro oblicuo, la ecuación de la trayectoria de la partícula y otras características del movimiento.

Que la componente según el eje x de la aceleración sea cero ($a_x = 0$) para todo instante de tiempo considerado, significa que en esa dirección la partícula tiene un movimiento uniforme. Esto implica que la velocidad según x será constante para todo instante t. Si la partícula se lanza con una velocidad inicial $\vec{v}_0$, vector cuyo módulo es v_0 y cuya dirección y sentido (flecha) forma un ángulo θ con el eje positivo de las x, entonces (debido al carácter vectorial de las magnitudes que describen este movimiento) podemos tratar independientemente lo que ocurre en la dirección **x** y en la dirección **y**:

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta$$

$$v_{0y} = v_0 \,\text{sen}\,\theta$$

donde v_{0x} y v_{0y} son las componentes x e y del vector velocidad inicial. Entonces

$$v_x = v_0 \cos\theta \qquad (1)$$

para todo instante de tiempo. Como vimos anteriormente en el movimiento uniforme la coordenada x de la posición de la partícula en un instante t viene dada en general por la expresión:

$$x = x_0 + v_{0x}(t - t_0)$$

En este caso, como elegimos $x_0 = 0$, $t_0 = 0$

$$x = v_0 \cos\theta \; t \qquad (2)$$

En cambio, para la componente vertical tenemos $a_y = -|\vec{g}|$ para todo instante de tiempo, lo cual implica que en esa dirección la partícula se mueve con un movimiento uniformemente variado. Para este tipo de movimiento hemos visto que en general las componentes según y de la velocidad y de la posición son:

$$v_y = v_{0y} + a_y\,(t - t_0)$$

$$y = y_0 + v_{0y}\,(t - t_0) + \tfrac{1}{2}\, a_y\,(t - t_0)^2$$

Reemplazando convenientemente en las expresiones anteriores $v_{0y} = v_0 \,\text{sen}\,\theta$, $a_y = -|\vec{g}|$, $y_0 = 0$, $t_0 = 0$ obtenemos:

$$v_y = v_0 \,\text{sen}\,\theta - |\vec{g}|\, t \qquad (3)$$

$$y = v_0 \,\text{sen}\,\theta\, t - \frac{1}{2}|\vec{g}|\, t^2 \qquad (4)$$

5.2 TRAYECTORIA DEL TIRO OBLICUO

Las ecuaciones (2) y (4) dan la trayectoria de la partícula en la forma llamada paramétrica. Esto significa que le podemos dar valores a *t* y obtener valores de *x* e *y* que corresponden al mismo instante de tiempo. Si estos pares de valores (x,y) se grafican en un sistema de coordenadas, da una parábola. Si deseamos obtener la ecuación de esa parábola despejamos *t* de la ecuación (2):

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$$

y reemplazando en (4):

$$y = \text{tg}\,\theta \;\; x - \frac{|\vec{g}|}{2\, v_0^2 \cos^2\theta}\, x^2$$

En el caso más general en que el origen no está en el lugar de lanzamiento, la expresión tiene la forma:

$$y = \operatorname{tg}\theta\,(x - x_0) - \frac{|\vec{g}|}{2v_0^2 \cos^2\theta}(x - x_0)^2$$

Esta ecuación se llama la parábola de tiro.

Analizaremos ahora algunos resultados en el tiro oblicuo.

Si queremos hallar el tiempo t_m que tarda la partícula en alcanzar la altura máxima y_m podemos partir de la condición de que la componente vertical v_y de la velocidaad en ese punto es cero. Usando la ecuación (3)

$$v_y = v_0 \operatorname{sen}\theta - |\vec{g}|\, t_m = 0$$

entonces despejando

$$t_m = \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{|\vec{g}|} \qquad (6)$$

Para hallar la altura máxima y_m que alcanza en su trayectoria la partícula podemos reemplazar la expresión (6) en la ecuación (5)

$$y_m = v_0 \operatorname{sen}\theta \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{|\vec{g}|} - \frac{1}{2}|\vec{g}|\frac{(v_0 \operatorname{sen}\theta)^2}{|\vec{g}|^2}$$

pero si $y_0 \neq 0 \Rightarrow$ $$y_m = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2\,|\vec{g}|} \qquad (7)$$

Si reemplazamos (6) en la ecuación (2) obtenemos la coordenada horizontal x_m correspondiente a la altura máxima.

$$x_m = \frac{v_0^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta}{|\vec{g}|} \qquad (8)$$

Si llamamos alcance del proyectil, A, a la coordenada x del punto de impacto de la partícula con el suelo, podemos encontrar A imponiendo la condición de que la ordenada de la partícula sea cero, es decir, $y(x = A) = 0$. Usando la ecuación de la parábola de tiro (5)

$$y = x\left(\operatorname{tg}\theta - \frac{1}{2}\frac{|\vec{g}|}{v_0^2 \cos^2\theta}x\right) = 0$$

Esta ecuación tiene dos soluciones, la solución trivial $x = 0$ que corresponde al instante inicial y otra solución:

$$x = A = \frac{2v_0^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta}{|\vec{g}|} = \frac{v_0^2}{|\vec{g}|}\operatorname{sen}(2\theta) \qquad (9)$$

Comparando las expresiones (8) y (9) resulta que

$$A = 2\,x_m$$

lo que era de esperar por la simetría de la parábola.

El ángulo de lanzamiento $\theta = 90°$ corresponde al tiro vertical hacia arriba y de las expresiones (6) y (7) se pueden obtener los mismos resultados del caso rectilíneo

$$t_m = \frac{v_0}{|\vec{g}|} \quad \text{e} \quad y_m = \frac{v_0^2}{2\,|\vec{g}|}$$

Demuestre que el alcance máximo A_m se obtiene para $\theta = 45°$.

Demuestre que si se lanza una partícula con, digamos 31°, tiene el mismo alcance que si se la lanza con 59°, porque 59°+31° = 90°.

Lo mismo ocurre para otros ángulos complementarios.

También se puede comprobar que para $\theta = 45°$ la altura máxima es igual a la cuarta parte del alcance.

Ejemplo 5.1:

Desde un puente que está a una altura h sobre el nivel de un río se lanza una piedra en forma horizontal con una velocidad $v_{0x} = 5$ m/s. La piedra tarda 4 segundos en hacer impacto sobre el agua. (Aproxime $|\vec{g}| = 10$ m/s²).

a) Calcule la altura h del puente.
b) ¿A qué distancia respecto del pie del puente la piedra hace impacto con el agua?
c) ¿Cuál es la componente vertical de la velocidad de la piedra v_y en el instante de hacer impacto con el agua?
d) ¿Cuál es el módulo de la velocidad de impacto?

Es importante que elijamos un sistema de coordenadas conveniente para describir el movimiento de la piedra y resolver el problema. Hemos adoptado como origen de ese sistema la intersección entre el pie del puente y el nivel del río; el eje vertical y es positivo hacia arriba y el eje horizontal x es positivo hacia la derecha. Este ejemplo es de tiro horizontal, un caso particular de tiro oblicuo en el vacío.

Planteamos las ecuaciones de la posición y de la velocidad según los ejes **x** e **y** recordando que dado el sistema de coordenadas elegido, ***podemos descomponer el movimiento de la piedra en dos movimientos independientes, un Movimiento Rectilíneo Uniforme según la coordenada x y un Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado según la coordenada y, en su forma más general las ecuaciones son***

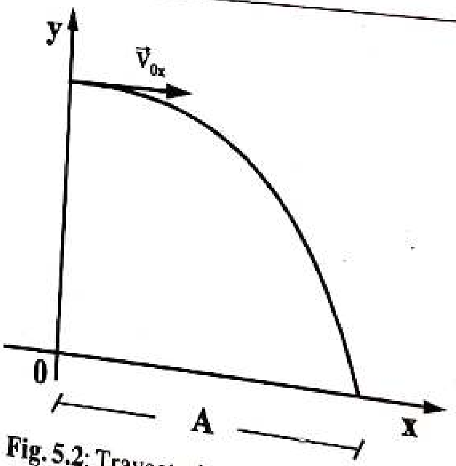


Fig. 5.2: Trayectoria de un Tiro Horizontal.

$$x = x_0 + v_{0x}(t - t_0) + \frac{1}{2} a_x (t - t_0)^2$$

$$v_x = v_{0x} + a_x (t - t_0)$$

$$y = y_0 + v_{0y}(t - t_0) + \frac{1}{2} a_y (t - t_0)^2$$

$$v_y = v_{0y} + a_y (t - t_0)$$

Pero en el caso planteado $x_0 = 0$; $y_0 = h$; $t_0 = 0$; $a_x = 0$; $a_y = -|\vec{g}|$ y por lo tanto, remplazando en las ecuaciones anteriores, tendremos que:

$$x = v_{0x}\, t \qquad (1)$$

$$v_x = v_{0x} \qquad (2)$$

$$y = h - \frac{1}{2} |\vec{g}|\, t^2 \qquad (3)$$

$$v_y = - |\vec{g}|\, t \qquad (4)$$

Ejemplo 5.1:

Para calcular la altura **h** del punto usamos la ecuación (3). Como sabemos que tarda 4 segundos en hacer impacto en el agua y que en ese instante la piedra está en y = 0, entonces

$$0 = h - \tfrac{1}{2}\, 10\ m/s^2\ (4\ s)^2$$

$$h = \tfrac{1}{2}\, 10\ m/s^2\ 16\ s^2$$

$$\boxed{h = 80\ m}$$

Usando la ecuación (3) podemos hallar directamente la distancia A a la cual la piedra hace impacto en el agua respecto del pie del puente:

$$A = 5\ m/s\ 4\ s$$

$$\boxed{A = 20\ m}$$

La respuesta **c)** se encuentra usando la ecuación (4)

$$v_y = -\ 10\ m/s^2\ 4\ s$$

$$\boxed{v_y = -\ 40\ m/s}$$

d) El módulo de la velocidad de impacto se calcula a partir de

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$v = \sqrt{(5\ m/s)^2 + (-40\ m/s)^2}$$

$$\boxed{v = 40{,}31\ m/s}$$

Ejemplo 5.2:

Un cañón dispara un proyectil con una velocidad inicial de 500 m/s con un ángulo de 30° respecto de la horizontal. Hallar:

a) Cuánto tarda el proyectil en alcanzar la altura máxima.
b) La altura máxima.
c) El alcance.

Adoptamos como sistema de referencia el indicado en la **Fig. 5.3**

tomando $t_0 = 0$, $v_{0x} = v_0 \cos 30°$,

$v_{0y} = v_0$ sen 30 °, $a_x = 0$, $a_y = -\ |\vec{g}|$,

obtenemos:

$$x = v_0 \cos 30°\ t \qquad (1)$$

$$y = v_0\ \text{sen}\ 30°\ t - \frac{1}{2}\ |\vec{g}|\ t^2 \qquad (2)$$

$$v_y = v_0\ \text{sen}\ 30° - |\vec{g}|\ t \qquad (3)$$

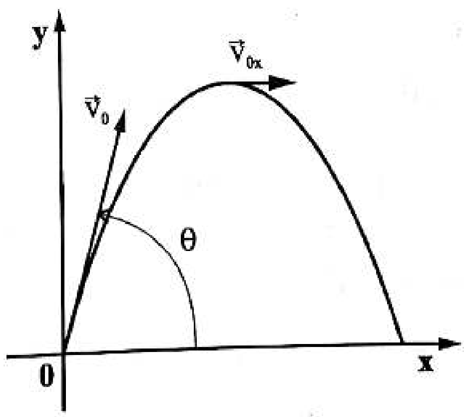


Fig. 5.3: Esquema de las condiciones inicilales

Ejemplo 5.2:

Cuando el proyectil alcanza su altura máxima la componente vertical v_y de la velocidad es cero, por lo tanto, usando (3):

$$0 = 500\ m/s\ 0{,}5 - 10\ m/s^2\ t$$

despejando t:

$$t = \frac{250\ m/s}{10\ m/s^2}$$

$$t = 25\ s$$

La altura máxima es alcanzada en 25 segundos, por lo tanto, usando la ecuación (2) y reemplazando convenientemente:

$$y_m = 500\ m/s\ 0{,}5\ 25\ s - \frac{1}{2}\ 10\ m/s^2\ (25\ s)^2$$

$$\boxed{y_m = 3125\ m}$$

Hemos deducido anteriormente que el alcance es igual a

$$A = \frac{v_0^{\,2}}{|\vec{g}|}\ \mathrm{sen}(2\theta)$$

por lo tanto:

$$A = \frac{(500\ m/s)^2}{10\ m/s^2}\ \mathrm{sen}\ 60°$$

$$A = \frac{250000\ m^2/s^2}{10\ m/s^2}\ 0{,}866$$

$$\boxed{A = 21650\ m}$$

5.3 RESUMEN

Con el sistema de referencia elegido en el texto y $t_0 = 0$

$$x(t) = v_{0x}\ t$$

$$v_x(t) = v_{0x}$$

$$a_x(t) = 0$$

$$y(t) = v_{0y}\ t - \frac{1}{2}|\vec{g}|\ t^2;\ \text{para}\ y_0 = 0$$

$$v_y(t) = v_{0y} - |\vec{g}|\ t$$

$$a_y = -|\vec{g}|$$

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta$$

$$v_{0y} = v_0\ \mathrm{sen}\ \theta$$

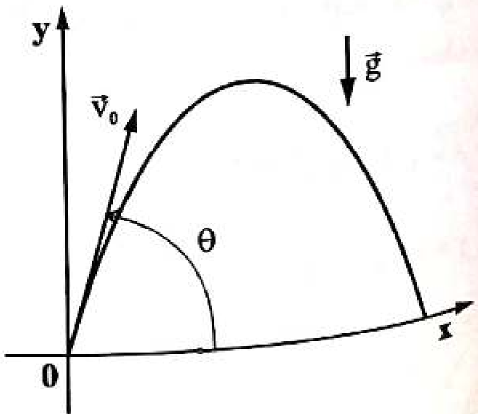


Fig. 5.4: Trayectoria, $\vec{v}_0$, $\vec{g}$ en un Tiro Oblicuo.

CAPITULO 6 MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

6.1 INTRODUCCION

Consideremos ahora el caso de una partícula moviéndose en una trayectoria que es una circunferencia, por ejemplo

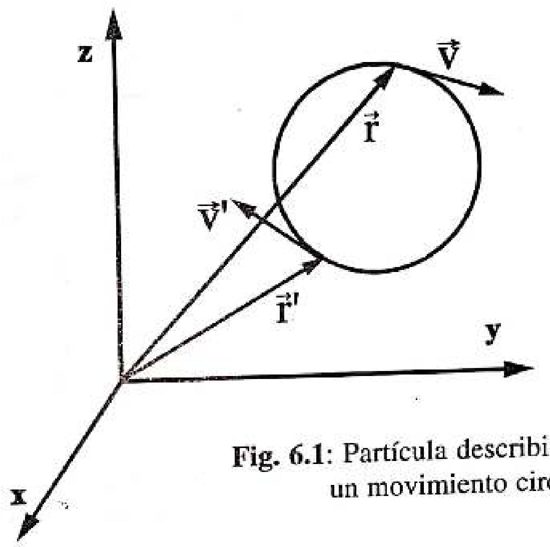


Fig. 6.1: Partícula describiéndo un movimiento circular.

Es evidente que resulta más cómodo tomar el centro de la misma como origen de coordenadas, pues de esta manera el vector posición resulta de módulo constante. Además, trabajando en el plano de la trayectoria circular, podemos tomar sólo dos ejes, simplificando la descripción.

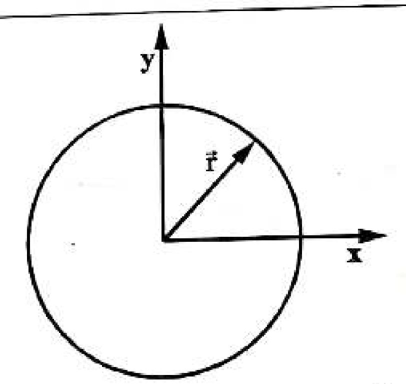


Fig. 6.2: Sistema de referencia elegido.

6.2 VELOCIDAD ANGULAR Y TANGENCIAL.

El movimiento de una partícula que describe una circunferencia se denomina ***circular***. En este tipo de movimiento el vector velocidad cambia punto a punto ya sea en módulo y dirección o al menos en dirección, como se muestra en la **Fig. 6.3**.

En el caso que la partícula recorra arcos iguales en tiempos iguales se tiene lo que se conoce como Movimiento Circular Uniforme (MCU). Definimos la velocidad angular ω como el cociente entre el ángulo $\Delta\theta$ barrido por el vector posición de la partícula y el intervalo de tiempo Δt transcurrido.

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = cte$$

La velocidad angular ω se mide en radianes por unidad de tiempo (recordar que un círculo completo, o sea 360°, equivale a $2\pi = 6{,}28$ radianes. Ver apéndice matemático). Como el radián es un número adimensional, la dimensión le ω resulta

$$[\omega] = 1/\text{tiempo} = \text{tiempo}^{-1}$$

por lo tanto sus unidades serán: s^{-1}, min^{-1}, h^{-1}, etc.

El concepto de velocidad angular puede emplearse también para trayectorias que no sean circunferencias:

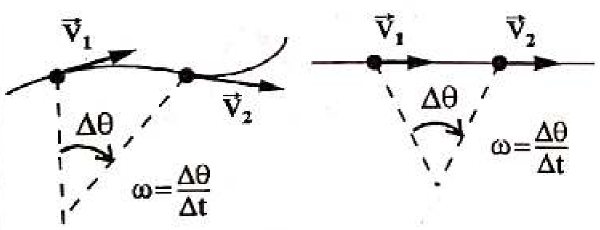


Fig. 6.5: ω en distintas trayectorias.

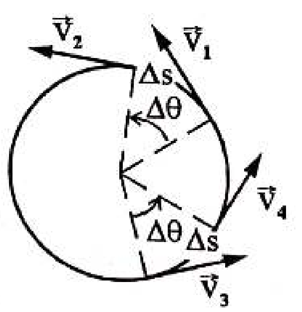


Fig. 6.6: Arcos de curva Δs, variaciones angulares y vectores velocidad.

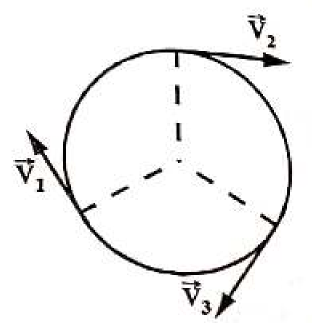


Fig. 6.3: Variación del vector velocidad en un movimiento circular.

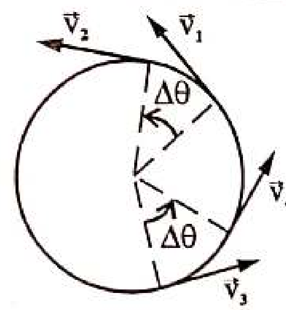


Fig. 6.4: Variaciones de velocidad y variaciones angulares $\Delta\theta$.

En el Movimiento Circular Uniforme, al ser ω constante, también lo es el módulo del vector velocidad, que suele denominarse velocidad tangencial. (Esta denominación se utiliza para diferenciarla de la velocidad angular, ya que todas las velocidades son tangenciales a la trayectoria).

Se definió $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$

pero en una circunferencia:

$$\Delta\omega = \frac{\Delta s}{r}$$

donde Δs es el arco de aquella parte de la circunferencia de radio r subtendida por el ángulo $\Delta\theta$.

Por lo tanto $\omega = \frac{1}{r}\frac{\Delta s}{\Delta t}$

y como $\Delta s/\Delta t$ es el módulo de la velocidad tangencial $\vec{v}$ que denotamos con v de aquí en más, resulta que:

$$\omega = \frac{v}{r} \quad \text{o} \quad v = \omega\, r$$

Ejemplo 6.1:

La Tierra tarda un día en dar una vuelta alrededor de su eje, siendo su radio medio de 6370 km. Si no se tiene en cuenta el movimiento de la Tierra alrededor del Sol, a) ¿cuál es la velocidad tangencial respecto a un sistema fijo a las estrellas, de una persona parada sobre el ecuador al nivel del mar? b) ¿Y de una persona situada a 60° de latitud?.

En este problema lo que se pide es el módulo de la velocidad tangencial debida a la rotación de la Tierra. Sabemos que $v = \omega\ R$ donde R es el radio de giro de la persona en cuestión. La Tierra da una vuelta por día, o sea un punto de la misma (cualquiera) barre un ángulo de 2π radianes cada 24 horas, o sea cada 86400 segundos. Como R = 6370 km = 6370000 m, entonces

a)

$$v = \frac{2\pi}{86400\ s}\ 6370000\ m$$

$$\boxed{v = 463{,}24\ m/s}$$

b)

Una persona a 60° de latitud tiene un radio de giro que ya no es R sino

$$R' = R\cos 60°$$

mientras que su velocidad angular no cambia. Entonces:

$$v' = \omega\ R' = \omega\ R\cos 60°$$

$$\boxed{v' = 231{,}62\ m/s}$$

¿Cuál es la velocidad de una persona parada en alguno de los polos?

6.3 PERIODO Y FRECUENCIA - ECUACION HORARIA

El Movimiento Circular Uniforme es un movimiento que se denomina periódico ya que por cada punto de la trayectoria el móvil pasa reiteradamente a intervalos iguales de tiempo. En dicho punto la velocidad del móvil es siempre la misma en módulo, dirección y sentido.

En este tipo de movimiento se llama ***período*** (T) al tiempo empleado en efectuar un giro completo.

Como $\Delta\theta = \omega\ \Delta t$ y en una vuelta $\Delta t = T$ y $\Delta\theta = 2\pi$, se tiene que

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad [T] = \text{tiempo}$$

Por otro lado se conoce como ***frecuencia*** (f) al número de vueltas que da la partícula por unidad de tiempo. Como un giro requiere un tiempo igual a un período:

$$f = \frac{1\ giro}{T} = \frac{1}{T} \qquad [f] = \text{tiempo}^{-1}$$

A la unidad s^{-1} se la denomina **Hertz** (Hz). Otra unidad muy común para frecuencia es r.p.m., revoluciones por minuto (1rpm=1/60 Hz).

Por último, se puede escribir

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Si un móvil tiene una velocidad angular ω determinada, resulta por definición:

$$\Delta\theta = \omega\ \Delta t$$

Si se toma como eje de referencia el de las abscisas para medir el ángulo (podría ser cualquier otro) entonces una partícula que en t = 0 se encuentre en un punto de la trayectoria circular de ángulo θ_0, como se ve en la **Fig. 6.7**, tendría una ecuación de movimiento dada por:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega\ (t - t_0)$$

En esta ecuación ω tendrá signo positivo si $\theta(t)$ aumenta con el tiempo y negativo en caso contrario.

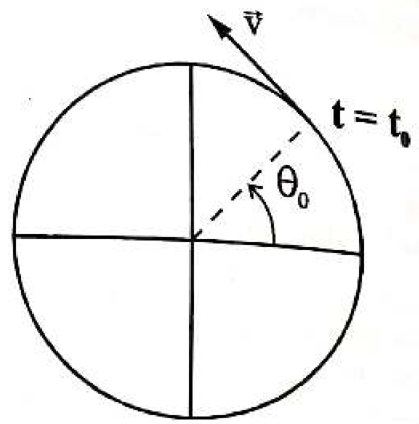


Fig. 6.7: Representación de la posición inicial, para un $\theta_0 \neq 0$.

Ejemplo 6.2:

Las agujas horaria y del minutero de un reloj coinciden a las 12 hs. ¿Qué ángulo formarán a las 12:30?

Lo primero que es necesario conocer son las velocidades angulares de ambas agujas. La aguja horaria da una vuelta cada 12 hs, por lo tanto:

$$\omega_h = \frac{2\pi}{12\ h} = \frac{2\pi}{43200\ s} = 1{,}45\ 10^{-4}\ s^{-1}$$

mientras que el minutero lo hace cada hora, así que:

$$\omega_m = \frac{2\pi}{3600\ s} = 1{,}74\ 10^{-3}\ s^{-1}$$

Las ecuaciones horarias de ambas agujas serán:

$$\theta_h = \theta_{h0} + \omega_h\ (t - t_0)$$

$$\theta_m = \theta_{m0} + \omega_m\ (t - t_0)$$

Para las dos agujas $\theta_{h0} = \theta_{m0} = 0$ (se cuentan los ángulos a partir del eje vertical) y $t_0 = 0$, por lo que los ángulos barridos por ellas al cabo de 30 min serán:

$$\theta_h = \omega_h\ 30\ 60\ s$$

$$\theta_h = 1{,}45\ 10^{-4}\ s^{-1}\ 1800\ s = 0{,}261\ (rad)$$

$$\theta_m = \omega_m\ 30\ 60\ s$$

$$\theta_m = 1{,}74\ 10^{-3}\ s^{-1}\ 1800\ s = 3{,}132\ (rad)$$

O sea que el ángulo formado por las dos agujas 30 minutos después de las 12 hs será:

$$3{,}132\ (rad) - 0{,}261\ (rad) = 2{,}871\ (rad)$$

$$1\ (rad) = 180°/\pi \Rightarrow 2{,}871\ (rad) = 164{,}5°$$

ACELERACION

En el Movimiento Circular Uniforme la velocidad tangencial tiene módulo constante, pero el vector que la representa cambia punto a punto a lo largo de la trayectoria al modificarse su dirección (**Fig. 6.8 a**). El vector velocidad tangencial se modifica, en otras palabras existe una aceleración y para que $|\vec{v}|$ = cte., dicha aceleración sólo puede ser perpendicular a la circunferencia que describe la partícula en este tipo de movimiento. Llevando los vectores velocidad tangencial a un origen común se puede obtener, por diferencia, el vector $\Delta\vec{v}$ que representa la variación de dicha velocidad (**Fig. 6.8 b**)

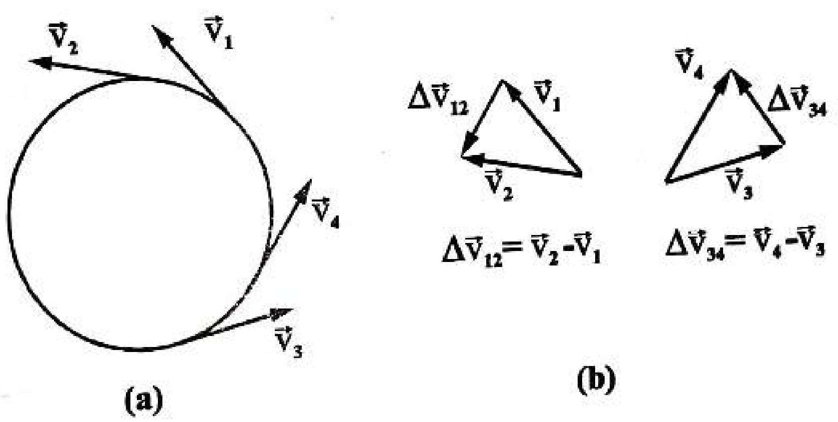


Fig. 6.8 (a , b): Variación del vector velocidad en un **movimiento circular uniforme.**

Esta diferencia puede hacerse con cualquier par de vectores velocidad tangencial. En particular, tomando los vectores correspondientes a dos puntos de la trayectoria muy cercanos, o sea separados por un ángulo muy pequeño, se puede ver (**Fig. 6.9**) que $\Delta\vec{v}$ es casi perpendicular a $\vec{v}$. En el límite de $\Delta\theta$ pequeño (o lo que es lo mismo para pequeños intervalos de tiempo Δt entre dos posiciones de la partícula), $\Delta\vec{v}$ es perpendicular a $\vec{v}$. Como $\vec{a} = \Delta\vec{v}/\Delta t$, entonces $\vec{a}$ tiene igual dirección que $\Delta\vec{v}$, o sea que es perpendicular a la trayectoria y está radialmente dirigida hacia el centro de la misma (**Fig. 6.10**).

Esta aceleración normal, que determina que cambie la dirección del vector velocidad pero no su módulo, recibe el nombre de ***aceleración centrípeta*** y se la designa $\vec{a}_c$.

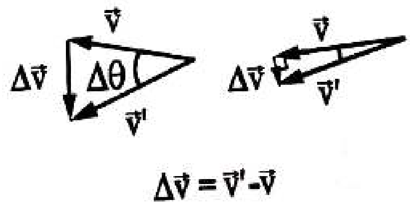


Fig. 6.9: Variación del vector velocidad para dos instantes muy próximos en un **movimiento circular uniforme.**

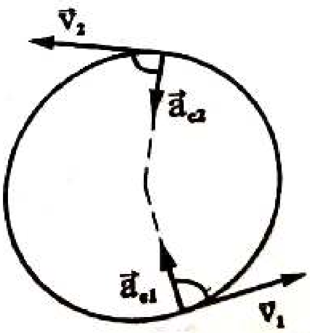


Fig. 6.10: Vector velocidad y vector aceleración centrípeta en un movimiento circular uniforme.

De la **Fig. 6.11 a** se puede ver que el ángulo $\Delta\theta$ entre dos puntos de la trayectoria en los cuales la partícula tiene velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ es el mismo que existe entre los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ cuando son llevados a un origen común, ya que ángulos entre perpendiculares son iguales.

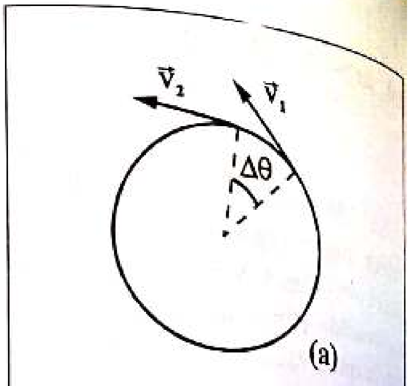


Fig. 6.11 a): Trayectoria y vectores velocidades.

Haciendo $\Delta\theta$ cada vez menor, el vector $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ tiende a confundirse con el arco $\Delta s'$ de una circunferencia (no la de la trayectoria) generada por la punta del vector velocidad a medida que se lo va dibujando a partir de un origen único y que por lo tanto tiene como radio el módulo de ese vector velocidad, que es constante en el Movimiento Circular Uniforme. Esta «trayectoria» en un espacio de velocidades se denomina ***hodógrafa*** (**Fig. 6.11 b**). Como en una circunferencia el arco comprendido por determinado ángulo es igual a dicho ángulo por el radio

$|\Delta\vec{v}| = |\vec{v}|\, \Delta\theta$ y si $|\Delta\vec{v}| = \Delta v$, $|\vec{v}| = v$; entonces

$a_c = \Delta v/\Delta t = v\, \Delta\theta/\Delta t = v\, \omega$; ya que $\Delta\theta/\Delta t = \omega$

como vimos anteriormente.

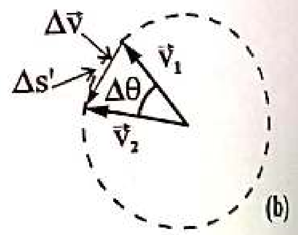


Fig. 6.11 b): "Trayectoria" del vector velocidad, **hodógrafa**.

Recordando que $v = r\,\omega$, se tiene el valor de la aceleración centrípeta en función de la velocidad angular o de la tangencial:

$$a_c = r\,\omega^2 = \frac{v^2}{r}$$

En este razonamiento nos hemos apoyado en la noción intuitiva de que la aceleración puede concebirse como una especie de «velocidad de la velocidad».

Ejemplo 6.3:

a) ¿Cuál es la aceleración a que se encuentra sometida una prenda de ropa en la pared de un tambor de una centrifugadora de 60 cm de diámetro que gira a 640 rpm? b) ¿Y cuál la correspondiente a la Luna que realiza un giro alrededor de la Tierra cada 27,3 días, siendo la distancia Tierra-Luna de $3{,}85 \times 10^8$m?

a) 640 rpm son 10,66 vueltas por segundo. Como cada vuelta son 2π radianes entonces:

$$\omega = 2\,\pi\, 10{,}66\ 1/s$$

$$a_c = r\,\omega^2 = 0{,}3\ m\ (2\pi\ 10{,}66\ 1/s)^2 = 1345{,}8\ m/s^2$$

¡Este valor equivale a 137 g!

b) Luna: Nuestro satélite natural da una vuelta cada 27,3 días; son 2358720 segundos

$$\omega = \frac{2\,\pi}{2358720\ s} = 2{,}664\ 10^{-6}\ s^{-1}$$

Esta velocidad angular tan baja explica por qué es tan difícil distinguir el movimiento de la Luna y que sólo se lo pueda detectar al observar sus distintas posiciones angulares respecto del Sol a lo largo de los días. Sin embargo la velocidad tangencial (su módulo) vale:

$$v = R\,\omega = 1{,}0256\ km/s$$

y por lo tanto:

$$a_c = R\,\omega^2 = \frac{v^2}{R} = 2{,}732\ 10^{-3}\ m/s^2$$

¡Este valor corresponde a 2,7 10^{-4} g!

6.5 RESUMEN

Definiciones:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \text{cte}$$

Ecuaciones:

$$v = r\,\omega$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega\,(t - t_0)$$

$$a_c = r\,\omega^2 = \frac{v^2}{r} = v\,\omega$$

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

$$\omega = \frac{2\,\pi}{T} = 2\,\pi\,f$$

7.1 COORDENADAS INTRINSECAS

Hemos considerado ejemplos en los que aparecen caminos con vehículos que se desplazan en ellos, y especificamos en su momento que eran rectos y aplicamos el tratamiento para movimientos rectilíneos (uniformes o variados).

Naturalmente, podríamos haber resuelto sin ninguna dificultad los mismos ejercicios sobre caminos curvos, con sólo hacer caso omiso de la curvatura y considerar que la variable llamada x correspondía a distancias marcadas sobre la curva. Ese eje x de representación sería una especie de planchado o rectificación de la trayectoria curva.

Para evitar la falta de rigor y verdad que cometeríamos si consideráramos recto lo que es curvo (recordemos que si se marcha a velocidad de módulo constante pueden, sin embargo, aparecer aceleraciones transversales), es usual introducir las coordenadas curvilíneas:

s(t): coordenada curvilínea (en una ruta, número de kilómetro del mojón)

v(t): velocidad escalar, (vale $|\vec{v}|$ ó - $|\vec{v}|$, según el móvil se desplace en el sentido +s ó en el opuesto).

a(t): aceleración escalar, (vale $|\vec{a}|$ ó - $|\vec{a}|$, donde $\vec{a}$ es la componente del vector a- en la dirección tangencial local de la trayectoria).

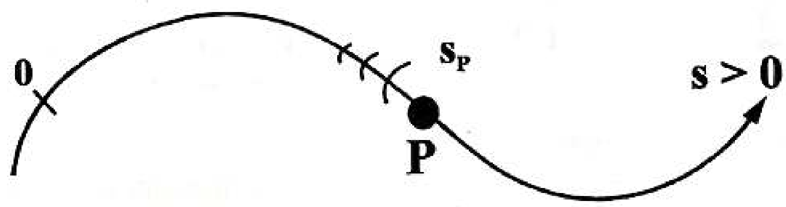


Fig. 7.1: Movimiento de una partícula en una trayectoria curva.

Las funciones s(t), v(t) y a(t) están relacionadas entre sí de la misma manera en la que lo estaban x(t), $v_x(t)$ y $a_x(t)$ en trayectorias rectas, o sea que v es la pendiente de la gráfica de s(t), y la aceleración escalar es la pendiente de la gráfica de v(t).

Notemos que estas tres variables, s, v, a son escalares, no vectoriales.

No debemos incurrir en la confusión de creer que en estas variables curvilíneas v sea el módulo del vector velocidad, o a el módulo del vector aceleración o s el módulo del vector posición. NO; lo único que vale es que $v = |\vec{v}|$ ó, $v = -|\vec{v}|$, según el caso. En cuanto a la aceleración escalar su módulo es igual al de la componente tangencial del vector $\vec{a}$, y s no guarda ninguna relación sencilla con $\vec{r}$.

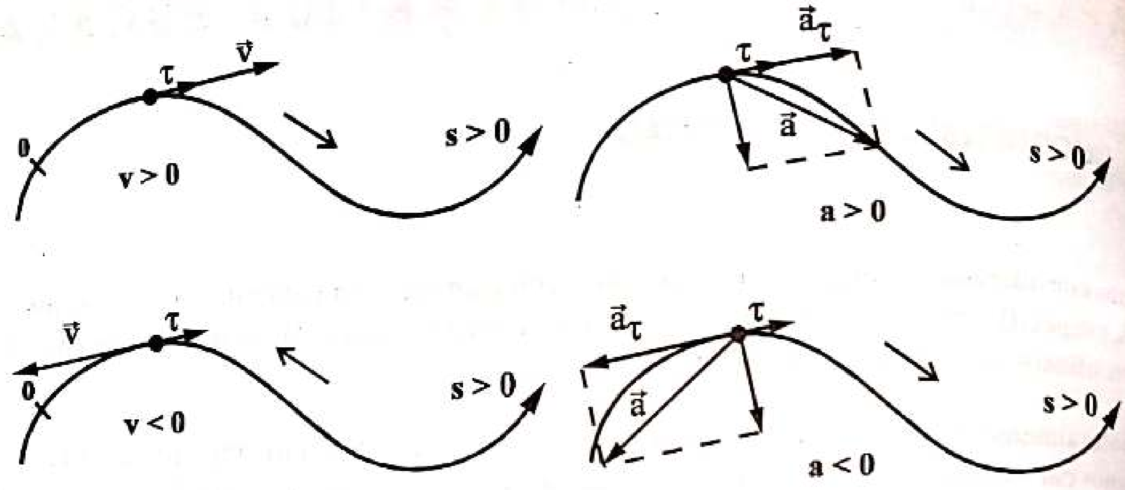


Fig. 7.2: Velocidades y aceleraciones vectoriales y escalares.

Es práctico imaginar un par de ejes coordenados ortogonales (o sea en ángulo recto) que acompañen a la partícula en su movimiento.

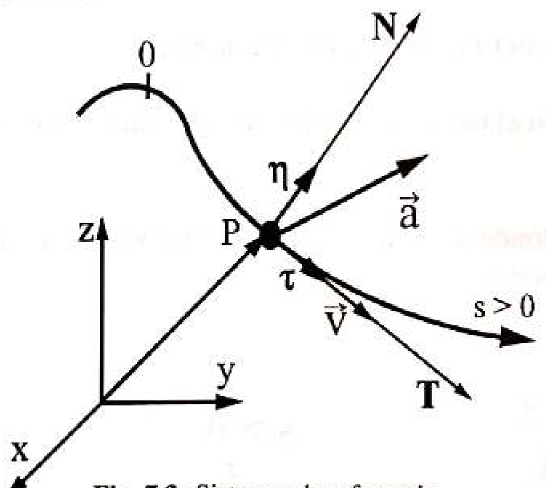


Fig. 7.3: Sistemas de referencia.

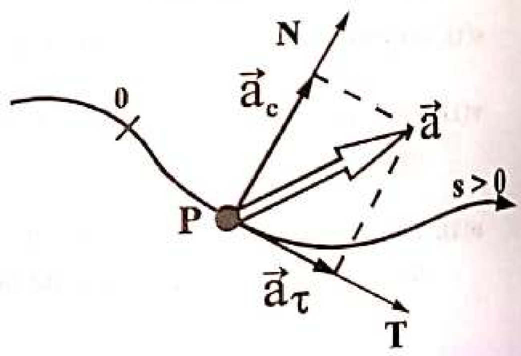


Fig. 7.4: Componentes intrínsecas del vector aceleración.

Un eje es tangente a la trayectoria y dirigido hacia el sentido s positivo; el otro es perpendicular, también llamado normal, dirigido hacia la parte cóncava de la curva.

En cada instante, la partícula tiene asociados un vector posición $\vec{r}$, un vector velocidad $\vec{v}$ y un vector aceleración $\vec{a}$, según se ha explicado.

Ahora bien, la coordenada s es la posición del móvil sobre la trayectoria, medida sobre la curva a partir del origen, la velocidad escalar v es, aparte de un signo + ó -, el módulo del vector velocidad y el vector aceleración $\vec{a}$ tiene dos componentes en relación con el sistema de los ejes **N** y **T**.

La componente $\vec{a}_c$, o sea la componente perpendicular, transversal o normal, se llama aceleración centrípeta, y se calcula con

$$|\vec{a}_c| = \frac{v^2}{R}$$

donde R es el radio de curvatura local (¡no es el vector posición!).

Una idea no muy rigurosa, pero si intuitiva, del radio de curvatura es la siguiente:

Tomemos un segmento pequeño de la trayectoria y busquemos qué circunferencia ajusta mejor en él. El radio de esa circunferencia es el radio de curvatura local.

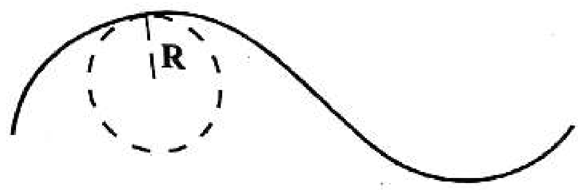


Fig. 7.5: Representación del radio de curvatura

La otra componente, $\vec{a}_\tau$, tiene su módulo igual al de la aceleración escalar, $|\vec{a}_\tau| = |a|$; donde

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Si $|\vec{v}|$ es constante, $\vec{a}_\tau$ vale cero, pero $\vec{a}_c$ es diferente de cero cuando el móvil se mueve sobre partes curvas de la trayectoria.