2.1 ECUACION HORARIA

Suponga una trayectoria rectilínea cualquiera

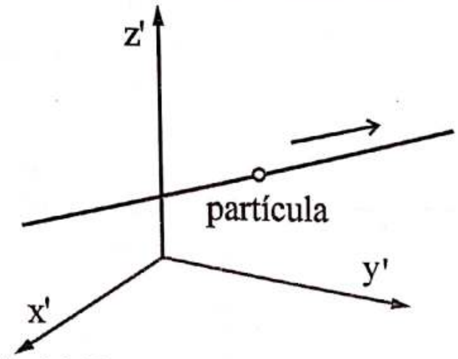


Fig. 2.1: Trayectoria rectilínea de una partícula.

Puesto que todo movimiento debe ser descripto desde un sistema de referencia, y la elección de este es arbitraria consideraremos aquel sistema en el cual la descripción sea más simple.

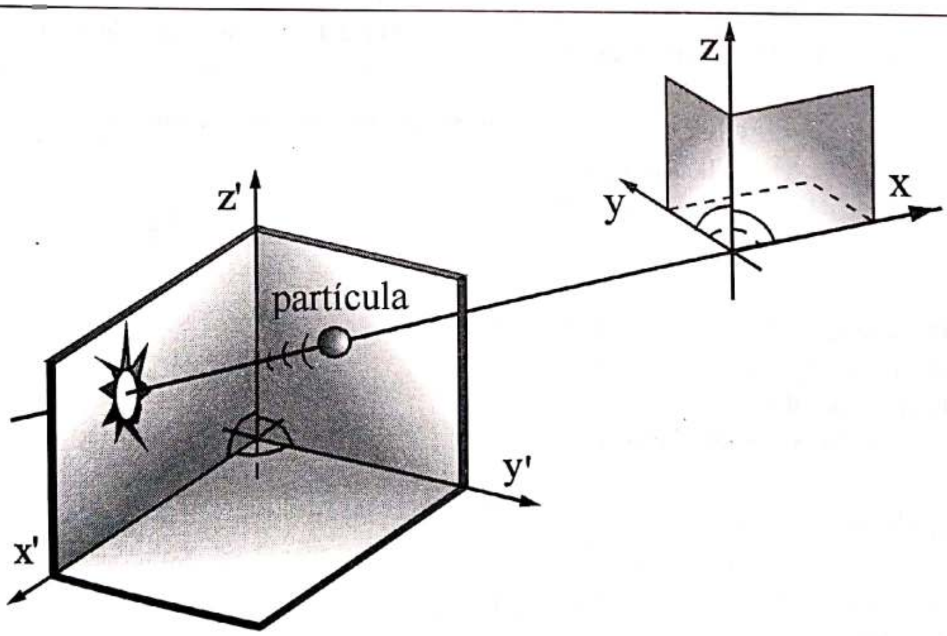


Fig. 2.2: Trayectoria rectilínea de una partícula. Se muestra la elección arbitraria de dos sistemas de referencia.

Todos los ángulos indicados son rectos; deben imaginarse a partir de esta figura, dos conjuntos de tres rectas perpendiculares en el espacio.

Por ejemplo en el caso de la figura, elegimos un sistema de referencia tal que el eje de coordenadas x contenga a la trayectoria.

De esta manera, el vector posición r quedará reducido a una única componente.

$$\vec{r} = r_x(t)\ \mathbf{i}$$

(Para revisar la descomposición de vectores, vea el Apéndice)

De esta manera la descripción se simplificará, pues podemos referirnos sólo a la componente del vector $\vec{r}$ en la dirección **i**.

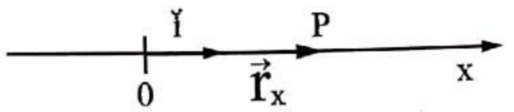


Fig. 2.3: Representación de r(t) en la dirección del eje x.

En este sistema se cumplirá además que

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\ \mathbf{i}$$

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\ \mathbf{i}$$

Para simplificar la notación y a partir de las consideraciones hechas, de aquí en adelante trabajaremos con las componentes de las tres variables cinemáticas ($\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$) en la dirección considerada, omitiendo los subíndices y el versor **i**.

En síntesis, del caso general $\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$ hemos pasado al particular, x, v_x, a_x, y por simplicidad notacional omitiremos los subíndices y quedará (para el movimiento rectilíneo solamente) x, v, a.

Recordemos que el parámetro que mide los cambios del vector posición en función del tiempo es el vector velocidad. La condición de **Movimiento Uniforme** podemos expresarla como **movimiento con velocidad constante**. Y recordando que la aceleración es la variable cinemática que mide los cambios de velocidad en función de tiempo, al ser ésta constante, también podemos expresar la uniformidad como **movimiento con aceleración nula**.

En síntesis, el Movimiento Rectilíneo Uniforme queda caracterizado por las siguientes funciones:

$$\vec{a}(t) = 0 \quad (*)$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 \ (\text{cte})$$

Ahora bien, ¿cuál será la función matemática que, considerando estos condicionamientos, describa el desplazamiento de la partícula en función del tiempo?

Impongamos las condiciones y tratemos de construir la ecuación horaria. Si graficamos la condición a = 0 resulta:

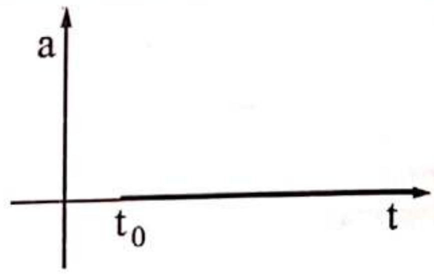


Fig. 2.4: Representación de **a** = 0.

Por definición sabemos que:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$

y

$$v - v_0 = a_m (t - t_0)$$

si

$$a_m = 0 \quad \Rightarrow \quad v - v_0 = 0$$

luego

$$v = v_0$$

y traducido a un gráfico resulta

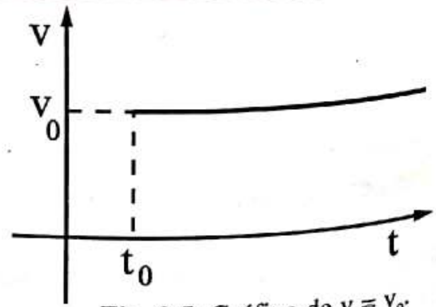


Fig. 2.5: Gráfico de $v = v_0$.

**Al vector nulo de ahora en más lo representamos simplemente 0.*

Hemos podido obtener la ley de variación de la velocidad en función del tiempo a partir del gráfico de **a**(t).

Por su definición, sabemos también que la velocidad media es:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = v_0$$

de donde

$$\Delta x = v_0 \, \Delta t$$

expresión que permite calcular el desplazamiento Δx que la partícula realiza en cada intervalo de tiempo Δt.

Consideremos el gráfico de $v = v(t)$ y elijamos un intervalo de tiempo Δt cualquiera:

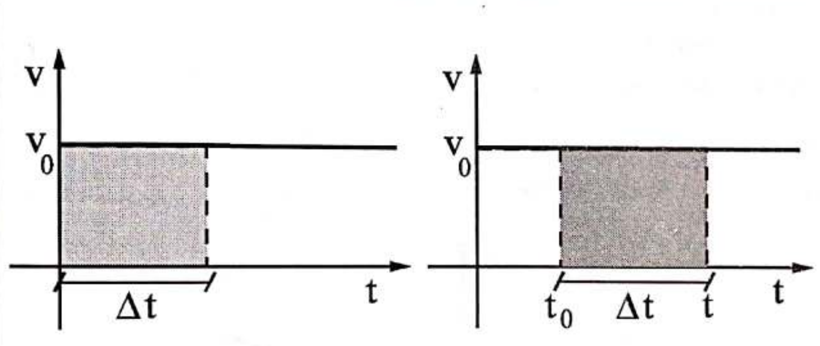


Fig. 2.6: Gráfico de $v = v_0$, $t_0 \neq 0$.

Si pensamos en términos geométricos, el producto $v_0 \Delta t$ tiene su representación en el gráfico como **área bajo la curva** correspondiente al intervalo de tiempo Δt. Si los ejes coordenados representaran longitudes, se trataría de un área en metros cuadrados, pero los ejes representan tiempo y velocidad. Es un área muy especial que no se mide en unidades de m², cm², etc, sino que al ser un producto de m/s por s, dará como resultado metros. Es decir, esta **área** tiene unidades de longitud y representa el desplazamiento realizado en el tiempo Δt.

Entonces, la ecuación $\Delta x = v_0 \Delta t$ resulta:

$$\Delta x = [\text{Area}] = x - x_0 = v_0 (t - t_0)$$

de donde

$$x(t) = x_0 + v_0 (t - t_0) \qquad (1)$$

donde x y t son variables genéricas para cualquier punto de la trayectoria y x_0 es la posición de la partícula que corresponde a $t = t_0$.

La expresión (1) nos dice que en intervalos de tiempo Δt iguales, el desplazamiento de la partícula se incrementa en cantidades iguales

$$\Delta x = v_0 \Delta t$$

Esta expresión se denomina ***ecuación horaria*** del Movimiento Rectilíneo Uniforme.

Imponiendo la condición $t = 0$ para el instante t en que comenzó a registrarse el movimiento, se obtiene:

$$x = x_0 + v_0 \, t$$

La expresión encontrada es del tipo

$$y = m\,x + b$$

que representa la ecuación general de una recta (ver el Apéndice matemático), donde $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ son las variables, $\boldsymbol{m}$ la pendiente de la recta y $\boldsymbol{b}$ la ordenada al origen.

Si identificamos los términos generales de la ecuación de la recta con las variables cinemáticas

$$y = x$$
$$x = t$$
$$m = v$$
$$b = x_0$$

la representación gráfica de la ecuación horaria será

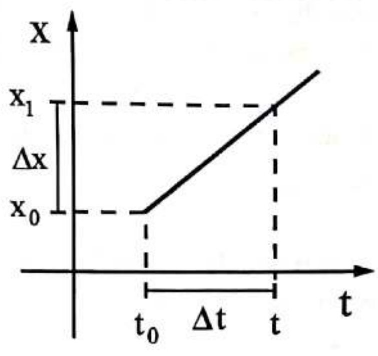


Fig. 2.7: Representación gráfica de la ecuación horaria.

De este modo hemos construído analíticamente la ecuación horaria (1) para el Movimiento Rectilíneo Uniforme, partiendo de la condición que la aceleración sea nula.*

¿Se podrá usar esta ecuación para el caso en que el movimiento se realice en dirección contraria?

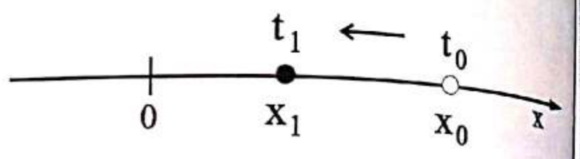


Fig. 2.8: Movimiento de una partícula con $x_0 \neq 0$.

Veamos: si la partícula se encuentra en $x = x_0$ para $t = t_0$ y para un cierto instante posterior se encuentra más cerca del origen de coordenadas, su velocidad media será

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}$$

En este caso, Δt sigue siendo positivo, pero $\Delta x = x_1 - x_0$ es negativo. Por lo tanto v_m será también negativa.

Repitiendo el razonamiento que hicimos anteriormente, vemos que la misma ecuación describe también este caso, solamente que ahora el valor de v_0 será negativo.

Esto nos lleva a considerar dos posibles situaciones físicas descriptas por la ecuación horaria del Movimiento Rectilíneo Uniforme:

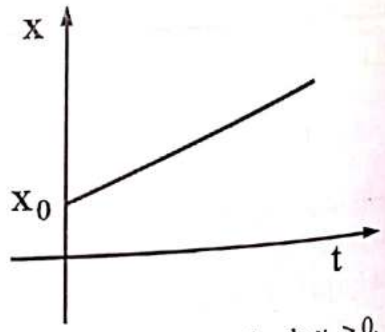


Fig. 2.9: Gráfico donde $v_0 > 0$.

Si $v_0 > 0$, el móvil se desplaza en el mismo sentido que el elegido para el eje de coordenadas y la representación gráfica de su ecuación horaria será de la forma que se observa en la **Fig. 2.9**.

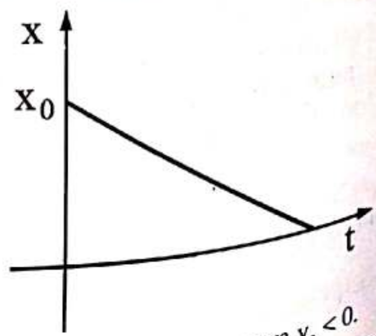


Fig. 2.10: Gráfico para $v_0 < 0$.

Si $v_0 < 0$, el móvil se desplaza en sentido contrario. El gráfico será como el de la **Fig. 2.10**.

Piense cuál es el sentido físico de un $x_0 > 0$ o un $x_0 < 0$.

(Para esta discusión le sería muy útil repasar la representación gráfica de rectas en el Apéndice matemático).

---

* *La ecuación horaria la hemos obtenido para una partícula que se encontraba sobre una trayectoria rectilínea moviéndose en la dirección positiva del eje de referencia y con una posición inicial x_0*

2.2 ENCUENTROS

Ejemplo 2.1:

Un automóvil sale de Buenos Aires con destino a Azul marchando a 80 km/h y simultáneamente parte desde Azul hacia Buenos Aires otro automóvil a 70 km/h. Si la distancia entre ambas ciudades es de 300 km, determine gráfica y analíticamente: a) al cabo de cuánto tiempo desde la partida se producirá el encuentro; b) a qué distancia de Buenos Aires se cruzarán; c) repita los cálculos anteriores suponiendo que el primer coche parte de Buenos Aires 45 minutos después de que lo hace el segundo.

Presentamos este sencillo problema de encuentro solamente para poner de manifiesto cómo se opera con la simbología que se ha introducido, cuya utilidad se hará notar en aplicaciones más complejas que ésta.

El problema en sí puede resolverse sin recurrir a ecuaciones ni fórmulas de ningún tipo: los automóviles están a 300 km de distancia. Uno de ellos descuenta de esa distancia 80 km en cada hora y el otro 70 km. Entre ambos descontarán 150 km de separación por cada hora que transcurre. Así, a las dos horas habrán consumido la distancia de 300 km que los separa, y habremos respondido: tiempo de encuentro: 2 horas; recorrido del primer automóvil: 160 km (2 h a 80 km/h), y por tanto se encontrarán a 160 km de Buenos Aires.

En general, dado un sistema de referencia, se determinan las ecuaciones de movimiento $x_1(t)$, $x_2(t)$. La condición de encuentro es que en algún instante las posiciones de ambos móviles coincidan, o sea, para $t = t_e$, $x_1(t_e) = x_2(t_e)$. El problema así planteado puede resolverse gráfica y analíticamente.

Elegimos un sistema de coordenadas con origen en Bs. As. y de dirección y sentido hacia Azul:

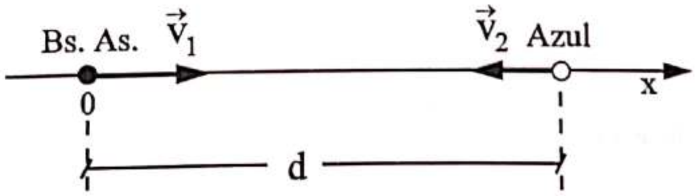


Fig. 2.11: Esquema con las condiciones iniciales.

Dado que los móviles parten simultáneamente comenzaremos a contar tiempos desde el momento de la partida. La ecuación general que describe el movimiento uniforme es:

$$x(t) = x_0 + v\,t$$

El auto que parte de Buenos Aires sale del origen de coordenadas, de modo que $x_{01} = 0$ y se mueve con velocidad coincidente con el sentido convencionalmente adoptado positivo del eje x, y entonces $v_1 = 80$ km/h. El auto que parte de Azul se halla en el instante origen de tiempos a 300 km en el sentido positivo de x desde el origen de coordenadas, de modo que $x_{02} = 300$ km y se mueve con velocidad de sentido opuesto al sentido positivo de forma que $v_2 = -70$ km/h. Midiendo el tiempo en horas y el desplazamiento en km, las ecuaciones horarias de ambos autos resultan entonces:

Ejemplo 2.1:

$x_1(t) = 80 \text{ km/h } t$

$x_2(t) = 300 \text{ km} - 70 \text{ km/h } t$

(t en h; x_1, x_2 en km)

Solución analítica:

Planteamos ahora la ecuación que nos da la condición de encuentro:

$$x_1(t_e) = x_2(t_e)$$

(t_e: tiempo de encuentro)

Cuando se encuentren ambos se hallarán a la misma distancia de Buenos Aires; esto justifica la igualación de ambas coordenadas $x_1 = x_2$:

$$80 \text{ km/h } t_e = 300 \text{ km} - 70 \text{ km/h } t_e$$

despejando

$$t_e = \frac{300 \text{ km}}{(80 + 70) \text{ km/h}}$$

Los automóviles se encuentran a las dos horas desde el instante de partida. El auto que partió de Bs. As. ha recorrido en ese intervalo:

$$x_1(t_1) = 80 \text{ km/h } t_e$$

$$x_1(t_1) = 160 \text{ km}$$

Obsérvese que, como consecuencia de la condición de encuentro, la coordenada de posición del móvil 2 será:

$$x_2(t_e) = 160 \text{ km}.$$

El auto que partió de Azul recorrió una distancia en ese intervalo que podemos calcular:

$$|x_2(t_e) - x_2(t_0)| = |160 \text{ km} - 300 \text{ km}| = 140 \text{ km}$$

Pero también podríamos haber encontrado la respuesta mediante la

Solución gráfica:

Consiste en representar gráficamente las ecuaciones horarias $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ y encontrar el instante t para el cual las gráficas se cortan.

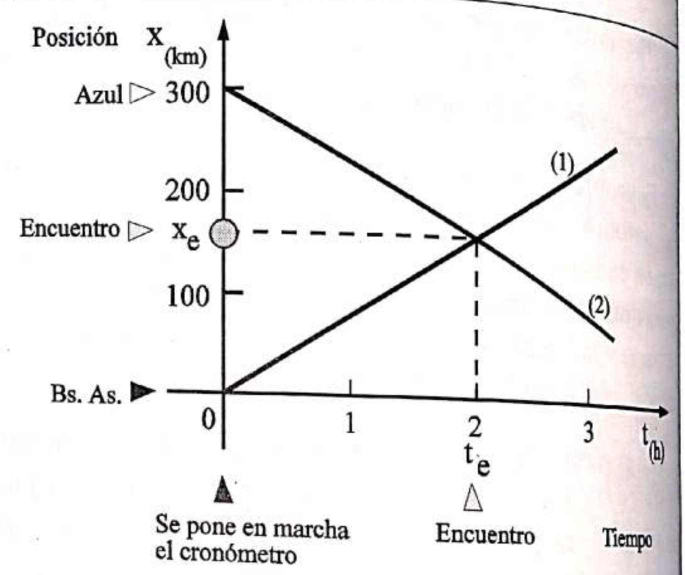


Fig. 2.12: Gráfico de las ecuaciones horarias de ambos móviles.

En coincidencia con el cálculo efectuado, leemos en el gráfico que las rectas se cortan para $t_e = 2$ h a una distancia del origen de 160 km.

Luego:

$$|\Delta x_1| = 160 \text{ km}$$

$$|\Delta x_2| = |160 \text{ km} - 300 \text{ km}| = 140 \text{ km}$$

De este modo hemos resuelto los item a) y b) del problema.

Sin embargo, podría ser interesante hacer un análisis más general de tal modo que podamos suponer distintas condiciones iniciales y obtener conclusiones rápidas.

Retomemos las ecuaciones generales del Movimiento Rectilíneo Uniforme

$$x_1(t) = x_{01} + v_1 t$$

$$x_2(t) = x_{02} + v_2 t$$

Ejemplo 2.1:

y apliquemos la condición de encuentro

$x_1(t_e) = x_2(t_e)$. Igualando:

$$x_{01} + v_1 t_e = x_{02} + v_2 t_e$$

$$t_e = \frac{x_{01} - x_{02}}{v_2 - v_1}$$

Supongamos, para todos los casos:

$x_{02} > x_{01}$, $v_1 > 0$, $v_2 > 0$ y veamos qué ocurre si:

a) $v_2 < v_1$

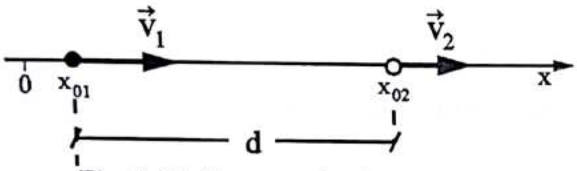


Fig. 2.13: Esquema donde $v_2 < v_1$.

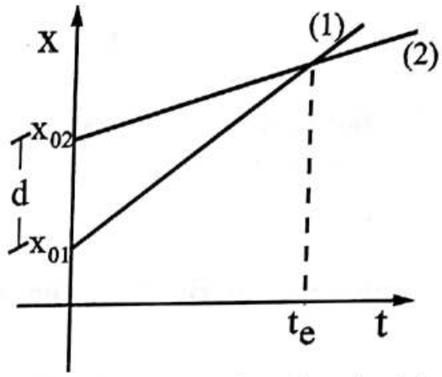


Fig. 2.14: Gráfico de las ecuaciones horarias del caso a).

$t_e > 0$, en cuyo caso se produce encuentro

b) $v_2 = v_1$

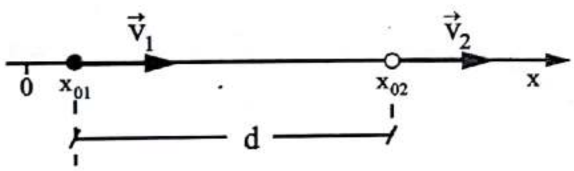


Fig. 2.15: Esquema donde $v_2 = v_1$

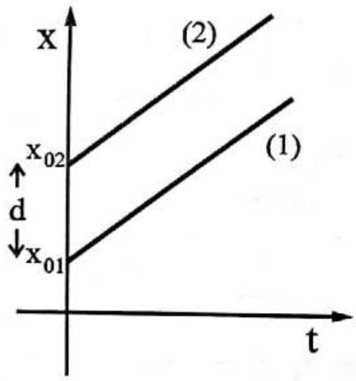


Fig. 2.16: Gráfico de las ecuaciones horarias del caso b).

t_e no está definido, no se produce encuentro

c) $v_2 > v_1$

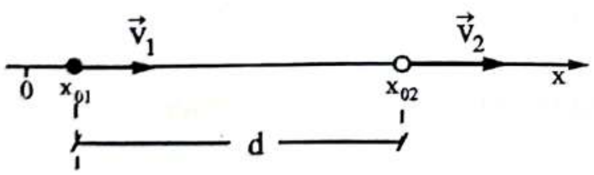


Fig. 2.17: Esquema donde $v_2 > v_1$.

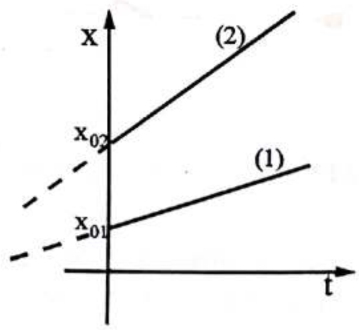


Fig. 2.18: Gráfico de las ecuaciones horarias del caso c).

$t_e < 0$, en cuyo caso no habrá encuentro. (Hay una especie de encuentro en el pasado, que se interpreta como el encuentro que habría ocurrido si los móviles en vez de iniciar sus movimientos en $t = 0$, hubieran estado en marcha desde antes).

Ejemplo 2.1:

Observe cómo todos los casos posibles de encuentro están contemplados en la expresión genérica que hemos encontrado.(*)

Que el encuentro se produzca o no dependerá de las condiciones cinemáticas del problema.

Resolvamos ahora, para la misma situación, el caso en que la partida de los móviles ***no es simultánea***. Por ejemplo, el automóvil de Bs. As. «parte» 3/4 de hora más tarde que el que «sale» de Azul.

Debemos tener en cuenta esta condición para plantear las ecuaciones horarias del movimiento de los automóviles. Supongamos que elegimos el instante origen de tiempos cuando «parte» el auto que sale de Azul, que lo hace primero. La ecuación horaria de este movimiento es entonces la misma que antes, o sea

$$x_2(t) = 300 \text{ km} - 70 \text{ km/h } t$$

El auto que sale de Bs. As. lo hace 45 minutos (o sea 3/4 h) más tarde, de modo que

$$x_1(t) = 0 \text{ km} \quad \text{para } 0 < t < 3/4 \text{ h}$$

$$x_1(t) = 80 \text{ km/h } (t - 3/4\text{h}) \quad \text{para } t > 3/4 \text{ h}$$

Para determinar t_e, x_e geométricamente podemos graficar las ecuaciones horarias de cada automóvil.

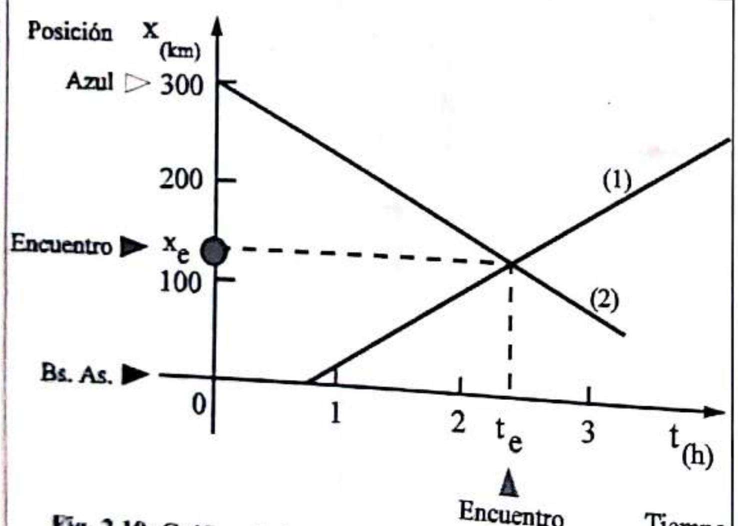


Fig. 2.19: Gráfico de las ecuaciones horarias para $t_{1o} \neq t_{2o}$.

Solución analítica:

planteamos la condición de encuentro

$$x_1(t_e) = x_2(t_e)$$

$$80 \text{ km/h } (t_e - 3/4 \text{ h}) = 300 \text{ km} - 70 \text{ km/h } t_e$$

$$\frac{300 \text{ km} + 80 \text{ km/h } 3/4 \text{ h}}{(80 + 70) \text{ km/h}} = 2,4 \text{ h}$$

(dos horas y veinticuatro minutos) y la distancia recorrida por el auto que sale de Bs. As. hasta el punto de encuentro es:

$$x_1(t_e) = 80 \text{ km/h } (t_e - 3/4 \text{ h}) = 132 \text{ km}$$

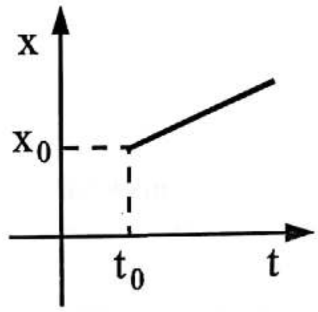
* *Compruébelo Ud. mismo, analizando los restantes casos posibles (para $x_{02} > x_{01}$) en que $v_1 \neq v_2$; esto es $v_1 > 0$, $v_2 < 0$, $v_1 < 0$, $v_2 > 0$ y $v_1 < 0$, $v_2 < 0$. Para que esté completo sólo resta estudiar aquellos casos en que: $x_{02} < x_{01}$, $v_1 \neq v_2$.*

2.3 RESUMEN

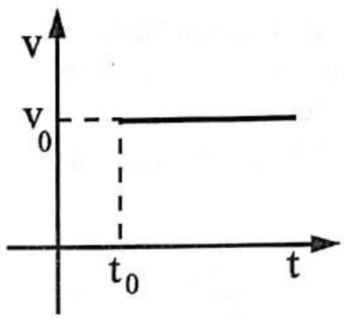
Movimiento**R**ectilíneo**U**niforme

1) $x = x_0 + v_0(t - t_0)$

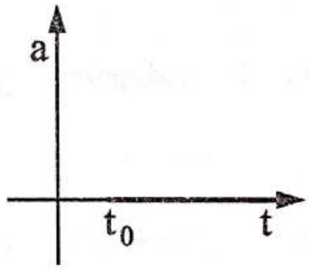
Ecuación horaria



2) $v = v_0$



3) $a = 0$

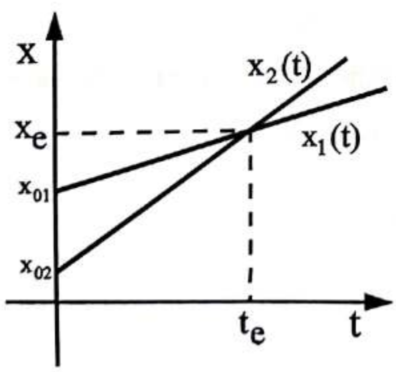


Condición de encuentro para dos móviles

$x_1(t) = x_2(t) = x_e$

Analíticamente

$t_1 = t_2 = t_e$



Gráficamente