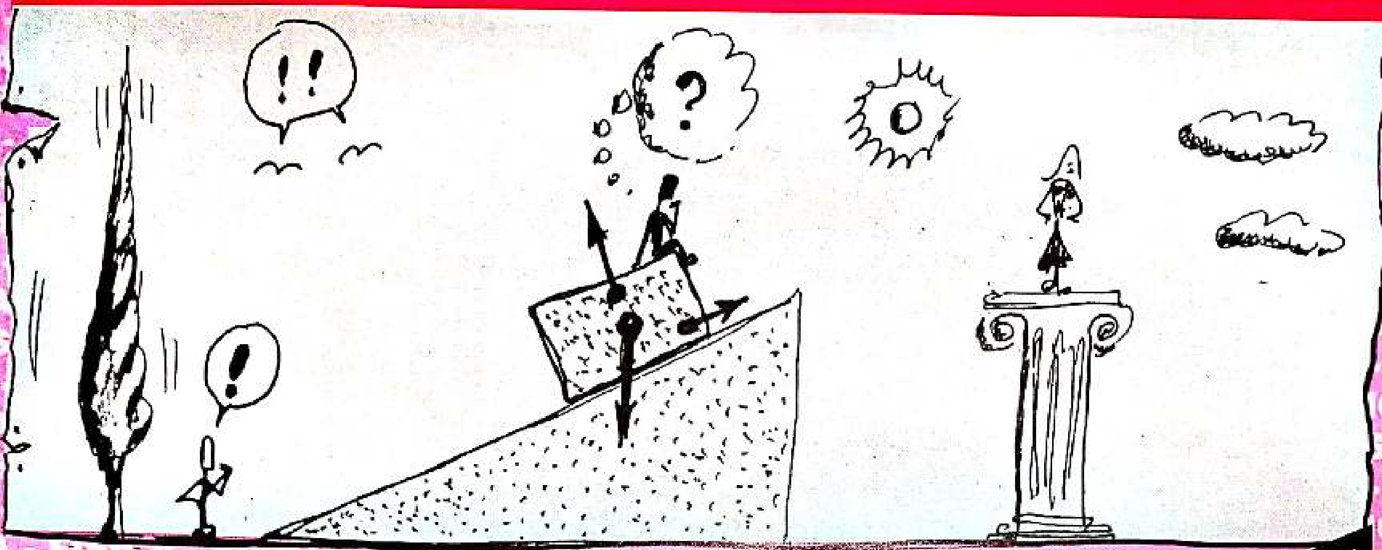
UBA - CBC



FÍSICA

TEORÍA
EJEMPLOS

FISICA

CBC-UBA

Agustín Rela

Liliana Reynoso

ANEXO DE MATEMATICA
Horacio Cassia

DISEÑO DE TAPA
Agustín Rela

DISEÑO GRAFICO
Liliana Reynoso

La primera versión de este material fue realizada en 1985 por Profesores de Física de U.B.A. - C.B.C.

Jorge H. Abeledo
Clara Braghiroli
Daniel E. Di Gregorio
Juan Carlos Fernández
Augusto O. Macchiavelli
Agustín Rela
Liliana Reynoso
Hugo Sirkin

© 2004 Ediciones Villoldo Yanele
Villoldoyanele@yahoo.com.ar - Cel. (15) 4045-8326
Primera edición marzo de 2004
Reimpresión marzo de 2014 en Artes Gráficas Leo,
Remedios de Escalada 3152, Valentín Alsina, Provincia de Buenos Aires

Hecho el depósito que marca la ley 11.723
ISBN: 987-21295-1-7

Para tener información sobre la cátedra, los alumnos pueden consultar en la dirección: www.fisicacbc.org y e-mail: fisicacbc@fisicacbc.org y fisica@cbc.uba.ar

A LOS ALUMNOS:

FISICA

NOTA PREVIA

Probablemente Ud. se inscribió en Física porque le interesa, o porque piensa estudiar una carrera que necesita de la Física. Pero también es probable que a Ud. no le interese este tema en absoluto, y que se haya inscripto por obligación, porque la carrera que Ud. seguirá impuso esta asignatura como obligatoria. Si tal es su caso, encontrará dificultades de muy difícil solución. Para encararlas lo invitamos a reflexionar sobre la posibilidad de que el desinterés o rechazo obedezca a experiencias poco felices con profesores poco didácticos y metodología rutinarias. Aquí comenzaremos desde cero, no daremos nada por sabido. Ud. estará en las mismas condiciones iniciales que los alumnos aventajados. A todos (aventajados, con dificultades y casos perdidos) les hacemos una propuesta de movilización mental y profundización. Estudiarán temas de Física, y cuando crean haberlos comprendido perfectamente, se encontrarán frente a ejercicios, preguntas y problemas que les mostrarán que lo que parecía fácil no lo es tanto; que el estudio superficial y memorístico no tiene ninguna utilidad, que hay que volver sobre lo estudiado y profundizarlo más, hasta tener la satisfacción de haber comprendido realmente. Si después de este esfuerzo y haber aprobado la materia Ud. decide seguir una carrera cuya especialidad esté desconectada de la Física, no habrá perdido su tiempo: lo habrá empleado en una de sus mejores formas, que es en la adquisición de buenas prácticas de estudio.

VIDA UNIVERSITARIA

Estudie con seriedad y empeño 8 horas diarias, netas; es lo mínimo que un profesional dedica a su trabajo. Y por épocas mucho más. No alcanza con el mero asistir y estudiar un poco antes de los exámenes; ahora el estudio pasa a ser una parte de las más importantes de su vida.

No descalifique temas por su supuesta lejanía con su campo de interés ("No me interesa qué ocurre con el peso de un cuerpo en órbita, porque estudiaré odontología, y trabajaré en la tierra."). El problema astronómico opera en este curso como un instrumento y no como un fin. Es como la gimnasia, que nos hace correr sin que tengamos que ir a ningún sitio.

CONSEJOS PRACTICOS

Si está leyendo algo y se traba en un punto, no se quede ahí, siga leyendo, ya lo entenderá después.

No tema dedicar demasiado tiempo a un mismo problema. No importa si le falta resolver alguno, porque siempre habrá problemas sin resolver; no se terminan. Vale más la profundidad que la cantidad. Agote las posibilidades de un problema.

Trate de entender, se puede estudiar mucho y no entender nada.

EL ESTUDIO

Los resultados que obtenga dependen principalmente del tiempo que usted destine a trabajar solo o en pequeños grupos, estudiando y resolviendo problemas, con escasas consultas. La calidad de los profesores no será suficiente si Ud. no se empeña seriamente en aprender.

No es obligación comprar libros, pero sí debe tener el material impreso del curso, el que podrá compartir con compañeros que tengan los mismos horarios y vivienda. Consulte de vez en cuando la bibliografía sugerida, más los libros que usted tenga.

Use nuestro idioma; no se limite a encadenar fórmulas. Escriba la explicación; si no tiene ese hábito, desarróllelo practicando la redacción de sus consultas y dudas. Lea lo que escribe, y comprobará con sorpresa que lo que quedó escrito no es lo que quiso escribir. Dé a leer lo suyo a otras personas y escuche sus observaciones.

Resuelva los problemas en cualquier orden, use lápiz o tinta de cualquier color, copie o no los enunciados, tache o borre, trabaje según su preferencia, sólo le pedimos que su trabajo sea claro para Ud., y para quien deba leerlo.

La respuesta correcta a una pregunta casi nunca se parece a una frase conocida. Por eso ante una pregunta, lo mejor que puede hacerse es tratar de entenderla y luego responderla con sinceridad. No haga lo que muchos, que, ante una pregunta, anotan a modo de respuesta todo lo que encuentran en sus libros, apuntes y memoria que les parece que tiene que ver. Así no acertarán ni por casualidad, la respuesta no está en el libro. Está en el razonamiento suyo.

Conteste las preguntas y resuelva los problemas antes de que lo haga el profesor. Ya sabemos que si lo hace después quedarán mejor resueltos. Pero lo que interesa no es que la solución quede lo mejor posible; lo que importa es que sea Ud. quien la halle. La clave es su esfuerzo continuado. Cuando no pueda avanzar entonces sí consulte.

No pregunte sobre ambigüedades o imprecisiones de los enunciados ("Señor en el problema 5, ¿Es con rozamiento o sin rozamiento?"). Si el enunciado es vago, escriba: "No dice si debe considerarse el rozamiento, analizaré ambas posibilidades. Supongamos...". Con esto Ud. obtiene dos ventajas: por una parte se habitúa a no responder reglas de juego arbitrarias; lo que se mide es su avance en el razonamiento, no su habilidad para obedecer órdenes. En segundo lugar: así vagos e imprecisos se presentan los problemas al profesional, y parte de su tarea es aclarar las preguntas.

LAS CLASES

Pida ayuda al docente, pero no reclamando que le diga cómo se resuelve un problema, sino mostrándole cuál fue su intento de resolución. Se lo comentará y se lo corregirá (o se lo devolverá por ininteligible).

Anote los nombres y apellidos de sus docentes, el número de su comisión, aula y el horario de sus materias. Tendrá importancia para resolver posibles problemas de pérdidas de información suya o nuestra.

LA TOMA DE NOTAS Y APUNTES

Muchos acostumbran oír lo que dice el profesor, sin anotar nada, pero copian cuidadosamente lo que el profesor escribe en el pizarrón, aunque sólo sean trazos sueltos. Consecuencia: sus notas no le servirán. Prefiera permanecer atento a lo que dice y escribe el profesor; para verlo en detalle están los libros. Anote, sí, lo que usted querría decir, sus dudas, sus preguntas, sus recordatorios; use abreviaturas. No deje pasar el tiempo y que se le olvide que quiso anotar con sus abreviaturas; trabaje con ellas apenas terminada la exposición.

EXAMENES

No se angustie por los exámenes. No está en juego la vida ni el futuro: a lo sumo un período. Tómelo como parte del estudio. Durante su transcurso no consulte ni responda consultas, para no falsear resultados. Escriba claro, dibuje grande, responda con sinceridad, explique sus respuestas.

Existe una tendencia muy generalizada a copiarse en un examen. Ud., probablemente sentirá el impulso de copiarse o permitir que alguien se copie de Ud. como esa tendencia es muy pronunciada, deberá hacer un considerable esfuerzo para evitarlo. La imitación de la conducta fue uno de los pilares de la transmisión de conocimientos, y en algunas especies de animales esa imitación está directamente relacionada con su supervivencia. Sin embargo, en esta etapa universitaria de estudios , los conceptos que debe adquirir no se pueden adquirir por imitación.

Se agradecen las propuestas, críticas y sugerencias. Envíelas a U.B.A. - C.B.C. FISICA, Pab. III Dto. V; Ciudad Universitaria.

Serán atendidas y respondidas.

Agustín Rela.

Liliana Reynoso.

BIBLIOGRAFIA

En este curso de Física no habrá bibliografía obligatoria. Le bastará con recurrir al material elaborado por los Profesores.

Sin embargo, es posible que sienta la necesidad de afirmar o profundizar los conocimientos que irá adquiriendo. Quizá le interesen las vinculaciones de la Física con otras disciplinas científicas (la química, la biología, por ejemplo), indagar acerca de su historia o reflexionar sobre el impacto en la sociedad de la ciencia y la tecnología y sus implicaciones éticas. Para esta variedad de posibles intereses ofrecemos las siguientes sugerencias bibliográficas, en las que no faltan algunas aventuras de la especulación científica en el ámbito de la literatura.

TEXTOS ELEMENTALES DE FISICA

Blackwood, O.; Kelly, W. y Bell, R.: **Física General**; México, Continental.

Gintel y Rojo: **Elementos de Física**.

Maiztegui, A. y Sabato, J.: **Introducción a la Física**, Tomo I; Buenos Aires, Kapelusz.

P.S.S.C.(Physical Science Study Committee): **Física**, Barcelona; Reverté.

Para su lectura sólo se requiere el conocimiento de matemática básica en el nivel de la enseñanza media.

OTROS TEXTOS DE UTIL CONSULTA

Quintana, G. y Romera Carrión, C.: **Manual del Ciclo Básico** y **Manual de Ingreso Universitario**; Buenos Aires, Nueva Librería.

Castiglioni, Perazzo, Alejandro Rela: **Física**; Buenos Aires, Troquel.

Giambiaggi y Bollini: **Física**; Buenos Aires, Edicien Editores.

Fernandez y Galloni: **Física**; Buenos Aires, Nigar.

TEXTOS DE FISICA MAS AVANZADOS

Elsberg y Lerner: **Física, fundamentos y aplicaciones**, Vol I; Mac Graw-Hill, Buenos Aires.

Halliday y Resnick: **Física**, Tomo I; México, C.E.C.S.A.

Sears y Zemansky: **Física General**; Madrid, Aguilar.

Tipler, P.: **Física**, Tomo I; Buenos Aires, Reverté.

Su lectura requiere, aunque no siempre, nociones de cálculo diferencial e integral.

TEXTOS INTERDISCIPLINARIOS

Kane y Sternhem: **Física**; Barcelona, Reverté.

Aplicaciones de la Física a las ciencias biológicas y a la medicina.

Lange, V. N.: **Problemas Experimentales Ingeniosos de Física**; Moscú, Mir.

Se presentan 132 problemas de medición que desafían la inventiva y el ingenio, se proponen igual cantidad de pistas o ayudas y por fin las respuestas detalladas, con nuevos problemas.

DIVULGACION CIENTIFICA:

Todos los textos interdisciplinarios citados contienen importantes aportes a la divulgación científica general, a ellos agregamos específicamente:

Asimov, I.: **Introducción a la ciencia**; Barcelona; Plaza.

Un compendio de nuestro conocimiento actual del mundo físico, escrito por un gran divulgador de la ciencia y maestro de la buena ciencia ficción.

Asimov, I.: **Cien preguntas básicas sobre la Ciencia**; Madrid, Alianza.

Es una recopilación de respuestas a preguntas de lectores de una revista de divulgación. Hay problemas de arqueología, astronomía, Física, computación y biología. No hay fórmulas.

FUENTES ORIGINALES

Babini, J.: **Galileo**; Buenos Aires, Centro editor de América Latina.

Antología de textos del gran físico italiano, con un estudio preliminar a cargo del compilador. En un buen resumen de la obra de Galileo que incluye temas físicos, astronómicos, filosóficos, teológicos y de política científica.

Galilei, G.: **Diálogos acerca de dos Nuevas Ciencias**; Buenos Aires, Losada.

La obra fundamental de Galileo, cuyas jornadas tercera y cuarta constituyen el basamento de la mecánica moderna. Hay fragmentos (dialogados) que no han sido superados en claridad y rigor.

Newton, I.: **El sistema del Mundo**; Madrid, Alianza.

Exposición popular en la cual Newton da a conocer sus ideas fundamentales sobre gravitación, el movimiento de la luna y el fenómeno de los cometas.

CIENCIA CULTURA Y SOCIEDAD

Snow, C.: **Las dos culturas y un segundo enfoque**; Madrid, Alianza.

Libro clásico en el que el autor, físico y novelista, analiza los encuentros y desencuentros de los especialistas en ciencias y en humanidades.

CIENCIA E IMAGINACION

Calvino, I.: **Las cosmicómicas**; Buenos Aires, Sudamericana.

Calvino, I.: **Tiempo cero**; Buenos Aires, Sudamericana.

A partir de respetables enunciados científicos, el narrador italiano desarrolla pintorescos relatos plenos de imaginación y humor.

Clarke, A.: **Cita con rama**; Buenos Aires, Emecé.

El abordaje de una gigantesca nave extraterrestre (en la que se manifiestan variados efectos dinámicos de su rotación) es el inicio de un atractivo relato.

PROGRAMA

CINEMATICA

Sistema de coordenadas espaciales de referencia, descripción del movimiento de una partícula: posición, velocidad, aceleración, tiempo. Tratamiento vectorial. Representaciones gráficas. Velocidad media e instantánea. Trayectoria. Movimiento rectilíneo uniforme. Movimiento curvilíneo uniforme. Movimientos rectilíneos uniformes relativos. Problemas de encuentro en la recta y en el plano. Movimiento rectilíneo uniformemente variado. Tiro (caída libre, vertical y oblicuo) en el vacío. Aceleración centrípeta y tangencial. Movimiento circular uniforme. Movimientos curvilíneos variados.

DINAMICA

Principio de inercia. Principio de masa. Principio de interacción (las Leyes de Newton). Diferentes tipos de interacción: elástica, gravitatoria, otras. Tratamiento de Mach. Problemas de dinámica de la partícula: plano inclinado, fuerza de rozamiento. Fuerza tangencial y centrípeta, dinámica del movimiento circular uniforme. Ejemplos de laboratorio y casos de gravitación con órbitas circulares. Ley de gravitación. Masa inercial y masa gravitatoria. Casos más generales de movimientos y estudio cualitativo de sus fuerzas: órbitas no circulares, péndulo, movimiento oscilatorio. Principio de relatividad de Galileo. Sistemas inerciales y no inerciales.

ESTATICA

Equilibrio de una partícula. Particularización de las leyes dinámicas para el caso estático de la partícula. Condiciones de equilibrio. Composición y descomposición de fuerzas. Fuerzas de vínculo. Equilibrio de sistemas de partículas. El cuerpo rígido considerado como un caso particular de sistemas de partículas. Otros sistemas de partículas no rígidos. Condiciones de equilibrio del cuerpo rígido: cuplas, momento de una fuerza y de un sistema de fuerzas. Equilibrante. Resultante. Equilibrio de cuerpos suspendidos y apoyados. Centro de gravedad. Máquinas simples: palanca, polea, balanza, torno, plano inclinado, aparejos. Trabajos virtuales.

ENERGIA

Trabajo de una fuerza. Energía cinética. Energía potencial. Potencia. Unidades más frecuentes. Energía mecánica y principio de conservación de la energía: química, eléctrica, térmica, ejemplos de transformación. Potenciales elásticos y gravitatorios. Impulso y cantidad de movimiento. Choques elásticos inelásticos y plásticos en una y dos dimensiones.

CAPITULO 1 CINEMATICA VECTORIAL

CONCEPTOS GENERALES

1.1 INTRODUCCION

Muchas veces nos interesa observar el movimiento de un cuerpo globalmente, sin tener en cuenta los movimientos relativos de unas parte con relación a otras. Por ejemplo:

- El vuelo de un insecto sin tener en cuenta el batir de sus alas.
- El movimiento de un satélite sin notar si está o no rotando.
- El desplazamiento de un tren sin fijarnos en el giro de las ruedas, o en que alguien está bajando una ventanilla, o en que las agarraderas colgantes se sacuden.

Esto puede deberse a que no nos interesa la descripción detallada, o a que el cuerpo está tan distante o es tan pequeño que no podemos apreciar estos detalles. En cualquiera de estos casos diremos que consideraremos al cuerpo como una ***partícula***, lo que equivale a visualizarlo como si ocupase un punto en el espacio. A veces en lugar del término **partícula** se usa **cuerpo puntual** o **punto material** con el mismo significado. En lo que sigue no debemos olvidar que aunque a veces lo representemos por medio de un punto, la partícula que estudiamos puede ser, por ejemplo: un átomo, un avión o un planeta (no es una cuestión de tamaño).

Decimos que una partícula **se mueve** si la vemos cambiar de lugar, es decir si ocupa distintas ***posiciones*** en distintos ***instantes***. Entonces, la idea de movimiento relaciona los conceptos de ***espacio*** y ***tiempo***. Antes de entrar de lleno en el estudio del movimiento, conviene que nos detengamos en la descripción de las posiciones que ocupa la partícula en el espacio, por un lado y de los instantes en que lo hace por el otro.

1.2 POSICIONES E INSTANTES

Para describir la posición es preciso referirla a algo, por ejemplo:

- 20 pasos adelante y 10 a la derecha de donde Ud. está ahora.
- La tercera butaca de la quinta fila.
- A 25 m de la puerta de la habitación, en dirección NE.

Nosotros diremos que usamos un ***marco de referencia****. Un marco de referencia habitual para nosotros suele ser nuestro planeta Tierra; puede ser también un tren en movimiento, las llamadas estrellas fijas, etc. Pero para poder fijar un punto necesitamos incorporar un ***sistema de ejes coordenados***.

** Si usted necesita información sobre este tema o de vectores, gráficos y sistemas de coordenadas; consulte el Apéndice de Matemática.*

En el espacio serán, en general, tres ejes; por ejemplo:

- Un eje hacia el Este, otro hacia el Norte y otro hacia arriba.
- Ejes paralelos a las ariatas de la abitación

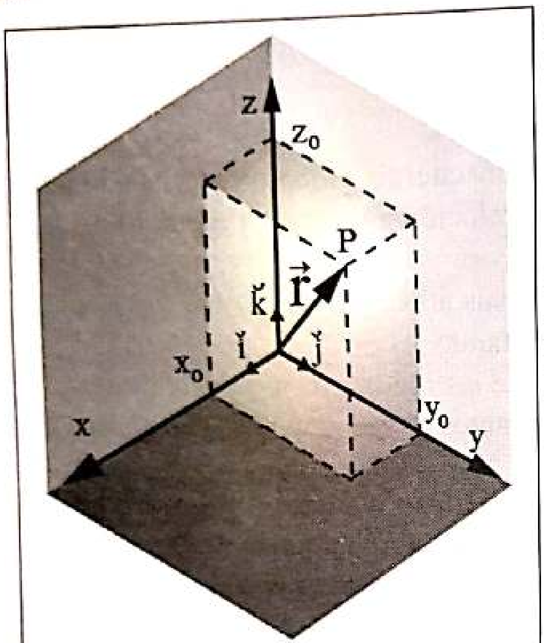


Fig. 1.1: Vector posición en un sistema de referencia espacial.

y además es necesario señalar un punto del marco de referencia como origen de coordenadas, por ejemplo:

- Monolito de la plaza de los Dos Congresos.

Una vez que tenemos nuestro marco de referencia completo, queda identificado cualquier punto del espacio y por lo tanto la ***posición*** de cualquier partícula, por medio de tres números (sus coordenadas). O bien conociendo su ***vector posición*** $\vec{r}$. Este es el vector que parte del origen de coordenadas y llega el punto que se quiere identificar. Sus componentes son precisamente las coordenadas de dicho punto.

La expresión vectorial de $\vec{r}$ en el sistema de referencia de la **Fig. 1.1** es:

$$\vec{r} = r_x\mathbf{i} + r_y\,\mathbf{j} + r_z\,\mathbf{k}$$

en la cual $r_x\mathbf{i}$, $r_y\mathbf{j}$, $r_z\mathbf{k}$ son las componentes vectoriales; r_x, r_y, r_z las componentes escalares que de ahora en adelante serán x, y, z.

También para identificar un instante debemos saber a qué referirlo:

- Trescientos años antes de Cristo.
- Dentro de dos horas.
- Cuenta regresiva en un lanzamiento espacial.

Acá nos bastará con fijar un origen en el tiempo e identificar los instantes por un número que indicará cuantos segundos (minutos, horas) después de este origen (si el número es positivo) o antes (si es negativo) tiene lugar el instante que queremos identificar. A este número lo llamamos coordenada temporal **t**.

1.3 DESCRIPCION DEL MOVIMIENTO

Ahora podemos volver a considerar nuestra partícula, y estudiar las posiciones que va ocupando en distintos instantes. Si nos interesa hablar sólo de las posiciones que ocupó el móvil, prescindiendo de (o agregando más tarde) la información sobre en qué instantes pasó por cada una de ellas, hablaremos de la ***trayectoria***: curva que el móvil recorrió al desplazarse. Pero para el estudio completo del movimiento debemos relacionar posiciones e instantes. Es intuitivo afirmar que la partícula debe ocupar una y sólo una posición en cada instante (en física microscópica, sin embargo, esta afirmación no puede considerarse válida); aunque sí puede ocupar en varios instantes la misma posición. Esto nos lleva a decir que, en el movimiento de una partícula, a cada $\mathbf{t}$ debe corresponder un $\vec{r}$ (o que $\vec{r}$ es una función de $\mathbf{t}$). Cuando haga falta explicitar esto escribiremos $\vec{r}(\mathbf{t})$ en vez de $\vec{r}$, o diremos $\vec{r} = \vec{r}(\mathbf{t})$.

Por supuesto, esto abarca tanto a los casos de movimiento estricto (a distintos $\mathbf{t}$, distintos $\vec{r}$) como a los casos en que la partícula no se mueve, ya que estos están incluídos dentro de la descripción general del movimiento.

Cada movimiento en particular corresponde entonces a una determinada función $\vec{r}(\mathbf{t})$. Dicho de otro modo, conocer la función $\vec{r}(\mathbf{t})$ es conocer el movimiento que hace la partícula que estudiamos, es decir, conocer en qué lugar estuvo en cada instante.

Pueden imaginarse varias formas de expresar cómo varía el vector $\vec{r}$ a medida que pasa el tiempo. Una de ellas sería representarlo como en la **Fig. 1.1**, con una colección de dibujos que lo muestre con los distintos tamaños y orientaciones para cada instante. Otra forma es una tabla de entrada simple (el valor del tiempo), que suministre como salidas los valores de sus componentes escalares x, y, z. Si se trata de un movimiento en el plano, bastará con una columna para el tiempo $\mathbf{t}$ y dos para las componentes de $\vec{r}$.

t(s)	x(m)	y(m)
0	1.0	2.0
1	1.2	2.1
2	1.4	2.2
3	1.5	2.2
4	1.6	2.1
5	1.8	2.0

Tabla A: Coordenadas del móvil para algunos instantes.

El inconveniente de este tipo de tablas es que no nos dan las posiciones en ***todos*** los instantes. ¿Dónde estaba el móvil en t = 2,5 s?. Quizás haya estado en x = 1,4 m, y = 2,2 m; pero pudo haber estado en x = 1,4 m, y = 2,3 m, o en infinidad de otras posiciones, y la tabla *no nos lo dice*.

Una forma alternativa son los gráficos; para el movimiento correspondiente a la **Tabla A** es el de la **Fig. 1.2**, la curva representa una de las posibles trayectorias, y sobre la misma están indicados los instantes en que la partícula pasó por las posiciones determinadas en la tabla.

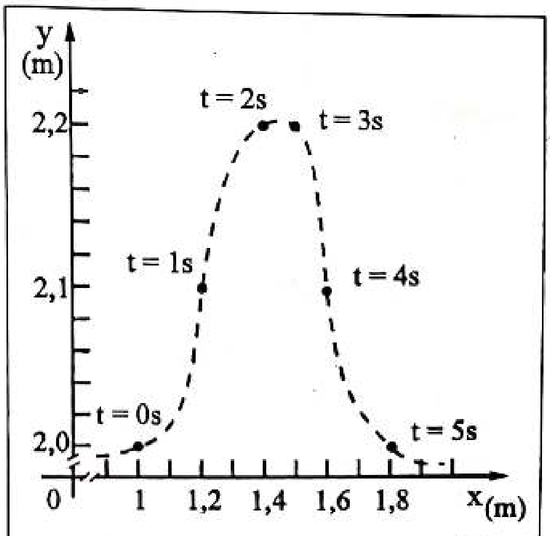


Fig.1.2: Una posible trayectoria del móvil.

Este gráfico todavía no nos dice exactamente dónde estuvo el móvil en cada instante, salvo los explícitamente indicados; pero al menos un gráfico de este tipo nos da una idea visual de los posibles lugares que el móvil recorrió. Más completa es la información que nos dan los gráficos siguientes, que muestran la evolución de cada coordenada por separado (nuevamente utilizamos los valores consignados en la **Tabla A**).

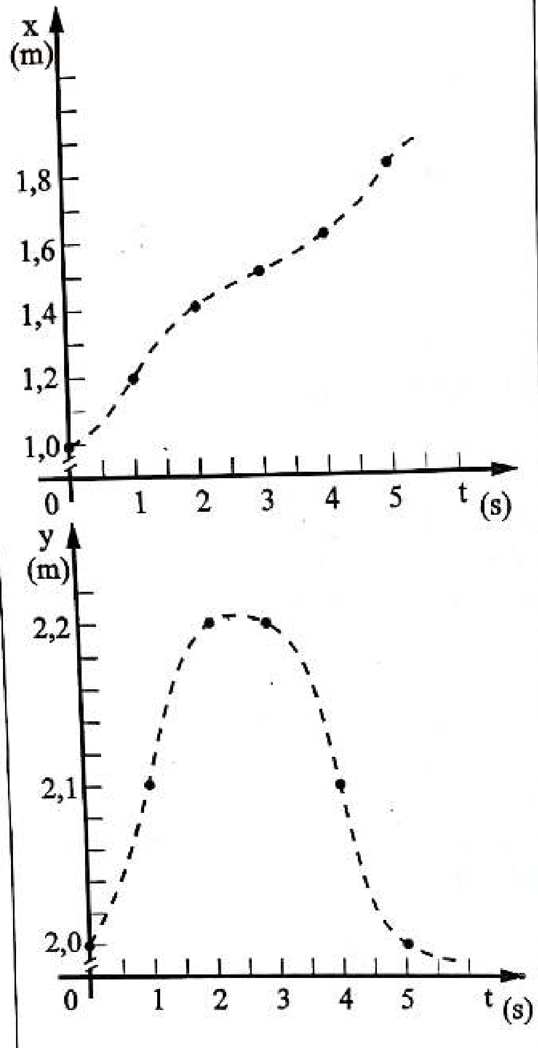


Fig. 1.3: Gráficos de la evolución temporal de las coordenadas x e y.

Acá no vemos la trayectoria (para ello debemos recurrir a gráficos como los de la **Fig. 1.2**) pero en cambio nos permiten tener una idea de cómo se desarrolla el movimiento en el tiempo (unimos los puntos obtenidos de la Tabla A con líneas de trazos discontinuos, porque no tenemos más información que la que suministra dicha tabla).

Si queremos hacer un tratamiento más detallado del movimiento, necesitaremos una forma numérica de conocer la posición en cada instante; eso se hace en general por medio de expresiones matemáticas que vinculan las coordenadas espaciales x, y, z con la coordenada temporal t (es decir, funciones matemáticas x(t), y(t), z(t) que suministren los valores de x, y, z para cualquier valor del tiempo t; las líneas de los gráficos serán entonces de trazo continuo). Por ejemplo, podremos considerar expresiones del tipo:

$$x(t) = 3t + 2$$
$$y(t) = 5t^2 - 2t + 4$$
$$z(t) = 5$$

o bien

$$x(t) = 5 \cos(3t)$$
$$y(t) = 5 \operatorname{sen}(3t)$$

o bien: $x(t) = 4 + 6(t - 2) + 3(t - 2)^2$; etc.*

1.4 DESPLAZAMIENTOS Y LAPSOS. VELOCIDAD MEDIA

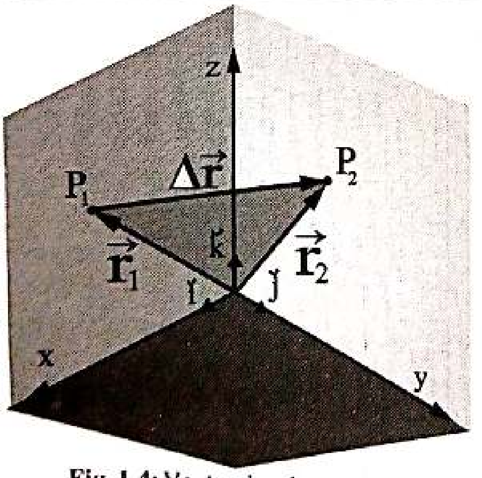


Fig. 1.4: Vector desplazamiento.

Si la partícula en un cierto tiempo se mueve del punto P_1 (vector posición $\vec{r}_1$) al punto P_2 (vector posición $\vec{r}_2$) llamamos ***vector desplazamiento*** al que tiene origen en P_1 y extremo en P_2 (ver **Fig. 1.4**)

Debemos notar que en la definición de vector desplazamiento sólo intervienen el punto de partida y el de llegada: es decir, es independiente del camino recorrido realmente por el móvil. Este vector es el vector diferencia entre los vectores posición del punto P_1 y el punto P_2. Lo indicaremos con la notación:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

**Aquí se ha prescindido de las unidades, para no oscurecer la exposición; en general hay que tenerlas en cuenta muy cuidadosamente, para poder operar con este tipo de ecuaciones (ver Unidad 0, Apéndice matemático).*

Análogamente llamaremos *lapso* o *intervalo temporal* al tiempo transcurrido entre los instantes en que el vector posición del móvil es $\vec{r}_2$ y $\vec{r}_1$, respectivamente, y lo indicaremos Δt, tal que:

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

Si establecemos que siempre restaremos el instante anterior del posterior, Δt nunca podrá tomar valores negativos. En cuanto a $\Delta \vec{r}$, no es ni positivo ni negativo: es un vector.

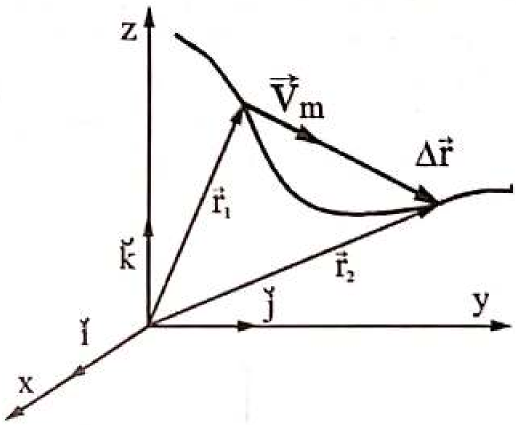


Fig. 1.5: Vector desplazamiento y vector velocidad media.

Al estudiar el movimiento de una partícula no sólo nos interesa conocer la intensidad y dirección de $\Delta \vec{r}$, es decir, cuán lejos y en qué dirección se desplazó, sino también en cuanto tiempo lo hizo, o sea el valor del intervalo Δt correspondiente. Esto nos conduce a definir el **vector velocidad media**, cociente entre $\Delta \vec{r}$ y Δt:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

La dirección y sentido de este vector son las del desplazamiento, y su intensidad será tanto mayor cuanto más distancia exista entre los puntos de partida y llegada y cuanto menos tiempo haya durado el desplazamiento.

Ejemplo 1.1:

Un móvil se desplaza hacia el norte 120 km empleando para ello 2 horas y luego hacia el este 180 km empleando 4 horas. Determinar el vector velocidad media en cada etapa y en el viaje total.

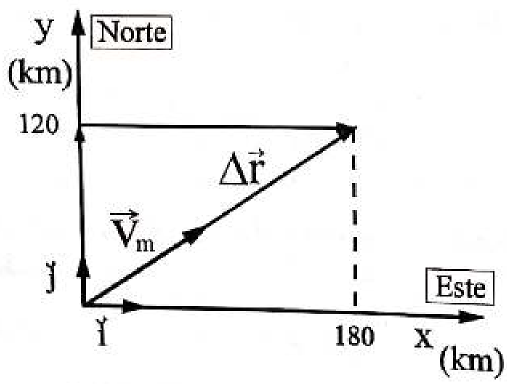


Fig. 1.6: Desplazamiento de un móvil en el plano.

1ra. Etapa

$\Delta \vec{r} = 120 \text{ km } \mathbf{j}$ $\quad \Delta t = 2 \text{ h}$

$$\vec{v}_m = \frac{120 \text{ km}}{2 \text{ h}} \mathbf{j} = 60 \text{ km/h } \mathbf{j}$$

2da. Etapa

$\Delta \vec{r} = 180 \text{ km } \mathbf{i}$ $\quad \Delta t = 4 \text{ h}$

$$\vec{v}_m = \frac{180 \text{ km}}{4 \text{ h}} \mathbf{i} = 45 \text{ km/h } \mathbf{i}$$

Viaje Total

$\Delta \vec{r} = 180 \text{ km } \mathbf{i} + 120 \text{ km } \mathbf{j}$ $\quad \Delta t = 6 \text{ h}$

$\vec{v}_m = 30 \text{ km/h } \mathbf{i} + 20 \text{ km/h } \mathbf{j}$

1.5 VELOCIDAD Y ACELERACION INSTANTANEAS

La descripción de un movimiento será tanto más detallada cuanto más próximos sean los instantes en que conocemos su posición. En ese caso tendremos más valores del vector velocidad media, cada uno correspondiente a un intervalo temporal más corto. Surge naturalmente el deseo de contar con el dato de la velocidad para cada instante. Sin embargo, es claramente imposible calcular directamente $\vec{v}_m = \Delta\vec{r}/\Delta t$ si el denominador es nulo. Lo que sí podemos plantearnos es calcular a qué valor parece aproximarse dicho cociente cuando el intervalo es tan corto como se quiera. En ese caso hablamos de velocidad instantánea $\vec{v}$.*

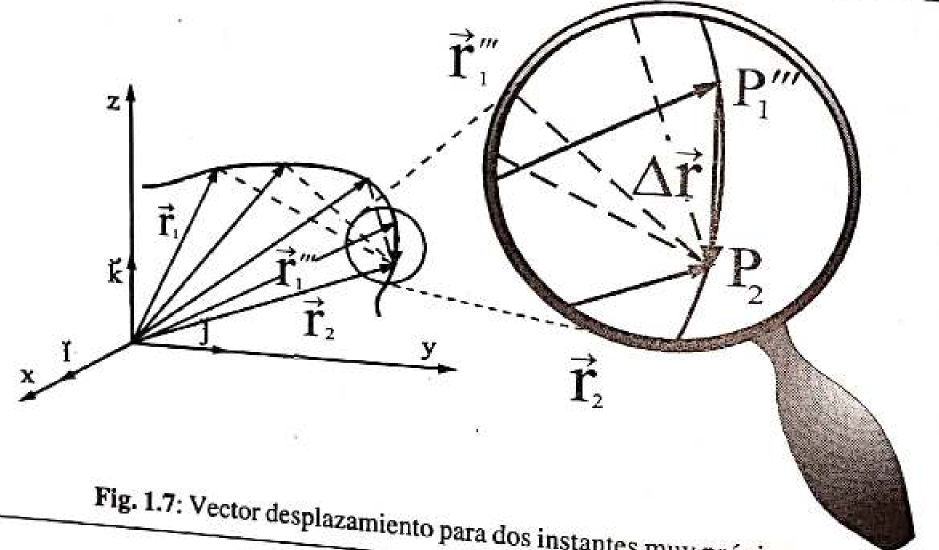


Fig. 1.7: Vector desplazamiento para dos instantes muy próximos.

En la **Fig. 1.7** vemos que cuanto menor sea la distancia entre los puntos P_1 y P_2 la dirección del vector $\Delta\vec{r}$ se confunde con la de la recta tangente a la trayectoria; cuando los dos puntos casi coinciden, $\Delta\vec{r}$ tendrá la dirección muy cercana a la de la tangente en cualquiera de esos puntos y por lo tanto $\Delta\vec{r}/\Delta t$ tendrá esa misma dirección. Habiendo definido en forma aproximada el vector velocidad instantánea $\vec{v}$ como el cociente $\Delta\vec{r}/\Delta t$, cuando los instantes t_1 y t_2 tienden a confundirse, podemos concluir: el **vector velocidad instantánea** tiene siempre la dirección de la recta tangente a la trayectoria. El sentido del vector velocidad instantánea es el mismo que el del movimiento. Al poder definir un vector velocidad para cada instante, vemos que en general no será igual en todos los instantes; es conveniente pensarlo entonces como función de t: $\vec{v} = \vec{v}(t)$.

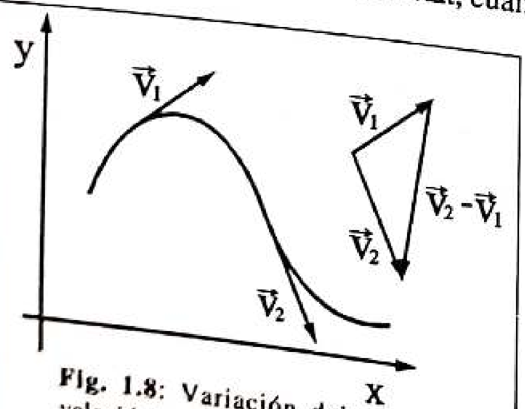


Fig. 1.8: Variación del vector velocidad entre los instantes t_1 y t_2.

Esto nos lleva a pensar en las variaciones que sufrirá $\vec{v}$ en un intervalo dado y en consecuencia a calcular las diferencias:

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

siendo $\vec{v}_2 = \vec{v}(t_2)$, $\vec{v}_1 = \vec{v}(t_1)$; ver **Fig. 1.8**.

**Esto corresponde matemáticamente al concepto de límite cuando el intervalo Δt tiende a cero. Utilizando ese concepto diríamos: la velocidad instantánea es el límite de la velocidad media para un lapso Δt, cuando Δt tiende a cero. Simbólicamente* $\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m$

Con un razonamiento equivalente al desarrollado cuando analizamos la variaciones de posiciones en el tiempo, podemos definir el *vector aceleración media* como el cociente entre $\Delta\vec{v}$ y Δt:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

Asimismo, nos interesará estudiar esta aceleración media cuando el intervalo es muy corto, y por lo tanto definir la aceleración instantánea, que será una función de t: $\vec{a} = \vec{a}\,(t)$.

Vimos que el vector velocidad instantánea es tangente a la trayectoria. Consideremos ahora el caso de $\vec{a}$; para ello imaginemos un Δt muy pequeño y miremos con una **"lupa"** lo que le sucede a los vectores velocidad, como hicimos anteriormente para el caso de la velocidad instantánea, trasladando los vectores velocidad y haciendo coincidir los orígenes de ambos vectores velocidad en un mismo punto para apreciar $\Delta\vec{v}$.

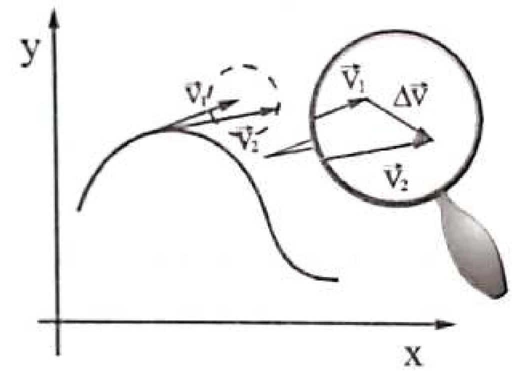


Fig. 1.9: Variación del vector velocidad para dos instantes muy próximos.

Vemos que $\Delta\vec{v}$ ***no*** tiene forzosamente la misma dirección que $\vec{v}$; $\Delta\vec{v}$ tiene, en general, componentes perpendicular y paralela a la tangente*, y por lo tanto esto también ocurre con la aceleración $\vec{a}$.

Cada componente dará información respecto de los cambios del vector velocidad; la componente tangencial respecto al módulo de la velocidad en cuanto a si aumenta o disminuye y la componente perpendicular da cuenta de la variación o cambios de la dirección del vector velocidad. En síntesis conocer $\vec{a} = \vec{a}\,(t)$ nos permite predecir cuál será la velocidad en algún instante que nos interese bajo determinadas condiciones.

Resumiendo, el vector aceleración puede ser nulo, tangente a la trayectoria o definido hacia la concavidad (hacia adentro). Jamás hacia afuera.

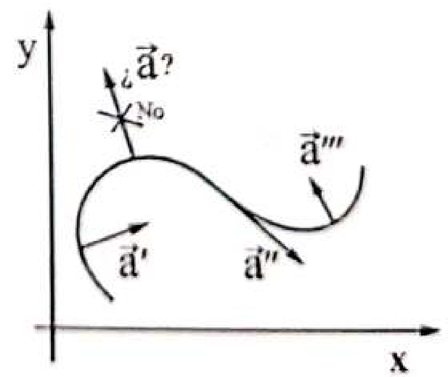


Fig. 1.10: Posibles aceleraciones para un movimiento en una dada trayectoria.

Las componentes del vector aceleración instantánea, en la dirección tangente y en la perpendicular a la trayectoria, reciben el nombre de componentes intrínsecas (ver Capítulo 7)

1.6 RELACIONES ENTRE COMPONENTES DE $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$ - GRAFICOS

Las relaciones vectoriales básicas que hemos introducido:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) \quad (1)$$

$$\vec{v}_m = \Delta r/\Delta t \quad (2)$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0^+} \vec{v}_m \quad (3)$$

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1) \quad (4)$$

$$\vec{a}_m = \Delta\vec{v}/\Delta t \quad (5)$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_m \quad (6)$$

conducen a relaciones entre las ***componentes*** de los vectores que son idénticas en forma. P ejemplo, siendo:

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$

$$\Delta\vec{r} = [x(t_2)\mathbf{i} + y(t_2)\mathbf{j} + z(t_2)\mathbf{k}] - [x(t_1)\mathbf{i} + y(t_1)\mathbf{j} + z(t_1)\mathbf{k}] =$$

$$\Delta\vec{r} = [x(t_2) - x(t_1)]\mathbf{i} + [y(t_2) - y(t_1)]\mathbf{j} + [z(t_2) - z(t_1)]\mathbf{k} =$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\,\mathbf{i} + \Delta y\,\mathbf{j} + \Delta z\,\mathbf{k}$$

y como

$$\vec{v}_m = v_{mx}\,\mathbf{i} + v_{my}\,\mathbf{j} + v_{mz}\,\mathbf{k}$$

la expresión $\vec{v}_m = \Delta\vec{r}/\Delta t$ queda:

$$v_{mx}\,\mathbf{i} + v_{my}\,\mathbf{j} + v_{mz}\,\mathbf{k} = \frac{\Delta x\,\mathbf{i} + \Delta y\,\mathbf{j} + \Delta z\,\mathbf{k}}{\Delta t}$$

que sólo es posible si:

$$v_{mx} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad v_{my} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \quad v_{mz} = \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

es decir, obtuvimos para las componentes x, y, z por separado, relaciones idénticas a la relación vectorial (2). Lo mismo pasa con las restantes.

Nótese que las últimas expresiones no son vectoriales; no hay representado en ellas ningún vector ni versor, o sea que no hay flechitas (→) ni letras negritas.

En síntesis, una igualdad vectorial del tipo, por ejemplo, $\vec{a}_m = \Delta\vec{v}/\Delta t$, puede interpretarse como una forma simbólica de expresar las siguientes igualdades escalares:

$$a_{mx} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \quad a_{my} = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \quad a_{mz} = \frac{\Delta v_z}{\Delta t}$$

Analizaremos ahora los gráficos de x, v_x, a_x en función del tiempo, (las conclusiones que obtengamos valdrán también para las componentes y, z).

Consideremos el siguiente gráfico de x = x(t) de la **Fig.1.11** donde hemos señalado las componentes x_1, x_2 del vector posición correspondientes a dos instantes t_1 y t_2. Si queremos calcular la $\mathbf{v}_m$ correspondiente a ese intervalo utilizaremos

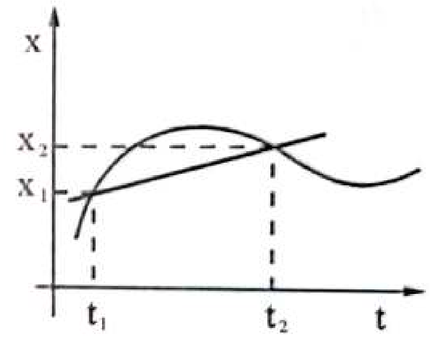


Fig. 1.11: Gráfico de la componente x del vector posición $\vec{r}$ como función del tiempo. Se muestra la recta secante que pasa por los puntos (t_1,x_1) y (t_2,x_2). (Secante: que corta)

$$v_{mx} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

pero este cociente es precisamente la pendiente de la ***recta secante*** que corta la curva que representa al movimiento en los puntos correspondientes a los instantes t_1 y t_2 (si no comprende inmediatamente esta parte, consulte el Apéndice matemático donde está tratado en detalle). ¿Qué pasa si ahora hacemos que t_1 y t_2 sean instantes tan próximos como se quiera?. La secante por dos puntos se aproxima todo lo que se quiera a la tangente en el punto de interés (ver **Fig. 1.12**); resumiendo:

- El valor de la velocidad media v_{mx} es igual a la pendiente de la recta secante (correpondiente a los instantes inicial y final del intervalo estudiado) en la gráfica de x(t).

- El valor de la velocidad instantánea v_x es igual a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de x(t), en el punto correspondiente al instante considerado.

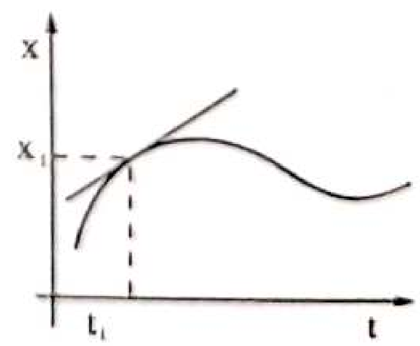


Fig. 1.12: Idem Fig 1.11, donde ahora se muestra la recta tangente a la curva en el punto (t_1,x_1). (Tangente: que toca)

Por supuesto, lo mismo sucede con v_{my}, v_y en la gráfica de y(t) y con v_{mz}, v_z en la gráfica de z(t).

Un razonamiento análogo nos permite llegar a idénticas conclusiones al estudiar los gráficos de velocidad en función del tiempo y considerar los conceptos de aceleración media e instantánea. Anotamos las conclusiones sin repetir el razonamiento:

- El valor de la aceleración media a_{mx} es igual a la pendiente de la recta secante (correspon diente a los instantes inicial y final del intervalo estudiado) en la gráfica de $v_x(t)$.
- El valor de la aceleración instantánea a_x es igual a la pendiente de la recta tangente (en e punto correspondiente al instante considerado) en la gráfica de $v_x(t)$.

Nuevamente, es obvio que lo mismo sucederá con a_{my}, a_y en la gráfica de $v_y(t)$; y con a_{mz}, a en la gráfica de $v_z(t)$.

Ilustramos estos conceptos en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.2:

La **Fig. 1.13** muestra las posiciones sucesivas de una partícula que se mueve bajo la acción de un resorte, para distintos instantes de tiempo. Además se indican las direcciones y sentidos de la velocidad y de la aceleración para los instantes t = 0; 2; 3; 5 y 7 segundos. Elijamos arbitrariamente un sistema de referencia como se indica en la figura.

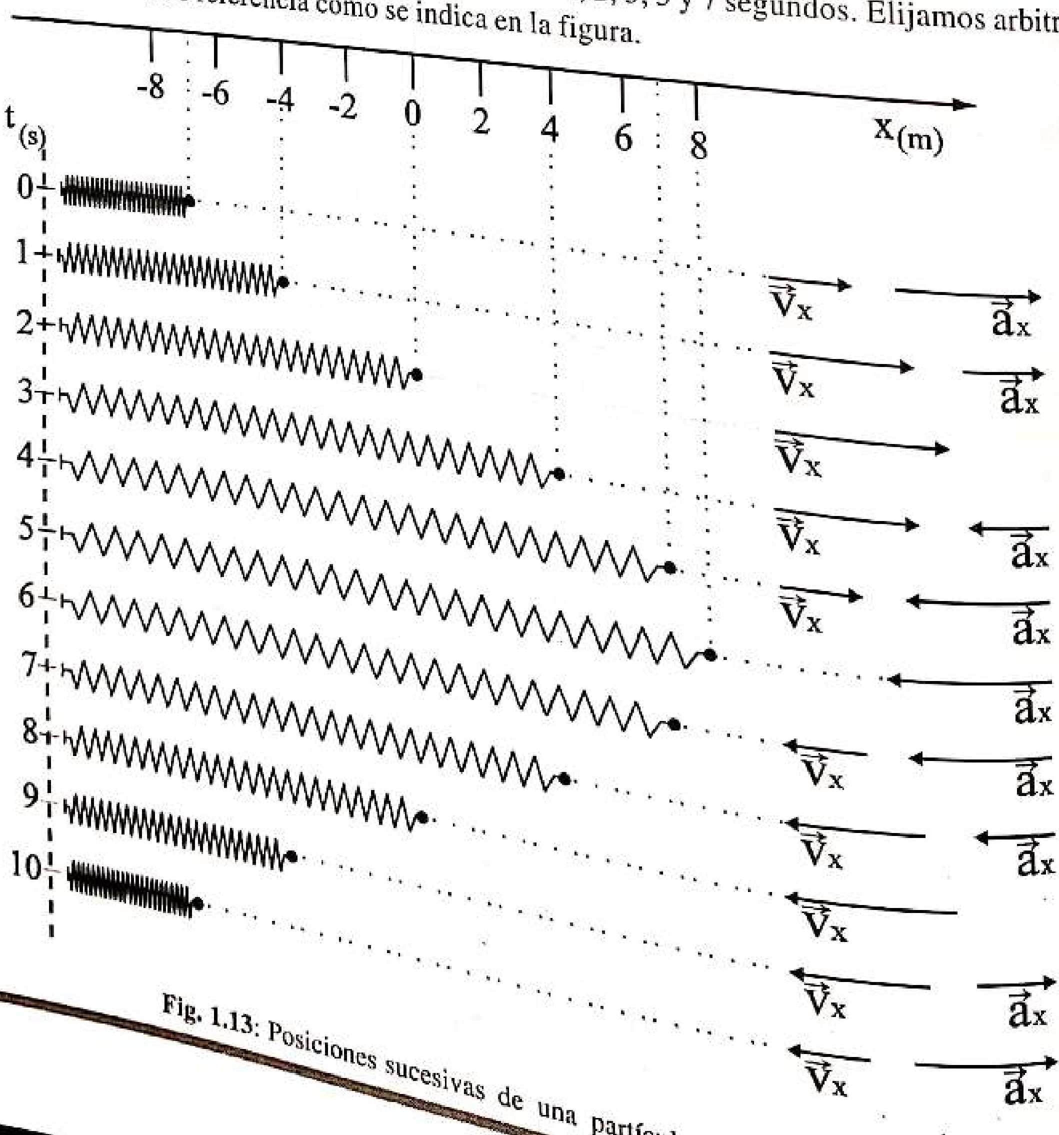


Fig. 1.13: Posiciones sucesivas de una partícula ...

Describamos brevemente el movimiento de la partícula. Por ejemplo, en t = 0 s la partícula se encuentra en la posición x =- 6,9 m, tiene una velocidad v_x= +2,1 m/s y una aceleración a_x= + 1,9 m/s². A los 2 segundos la partícula está en x = 0 m, su velocidad es de v_x= + 4,2 m/s y su aceleración es cero. De esta manera podemos describir sucesivamente el movimiento para los otros instantes que se indican. La **Tabla B** muestra los valores de la posición, la velocidad y la aceleración de la partícula para distintos instantes de tiempo.

t(s)	x(m)	v(m/s)	a(m/s²)
0	-6,9	2,1	1,9
1	-4	3,6	1,1
2	0	4,2	0
3	4	3,6	-1,1
4	6,9	2,1	-1,9
5	8	0	-2,2
6	6,9	-2,1	-1,9
7	4	-3,6	-1,1
8	0	-4,2	0
9	-4	-3,6	1,1
10	-6,9	-2,1	1,9

TABLA B: Posiciones, velocidades y aceleraciones de la partícula para distintos instantes.

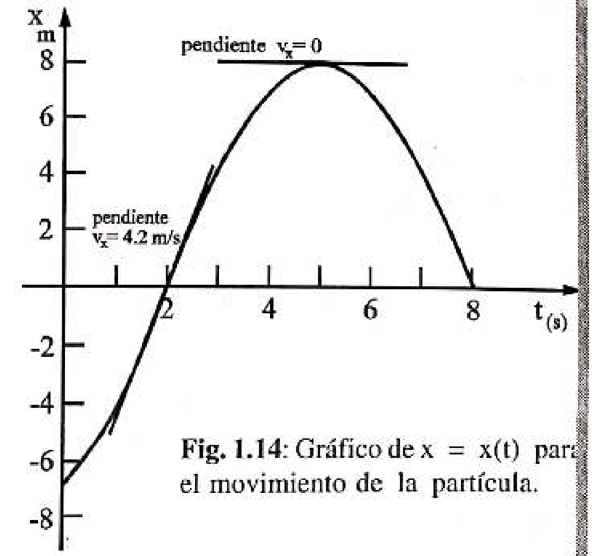


Fig. 1.14: Gráfico de x = x(t) para el movimiento de la partícula.

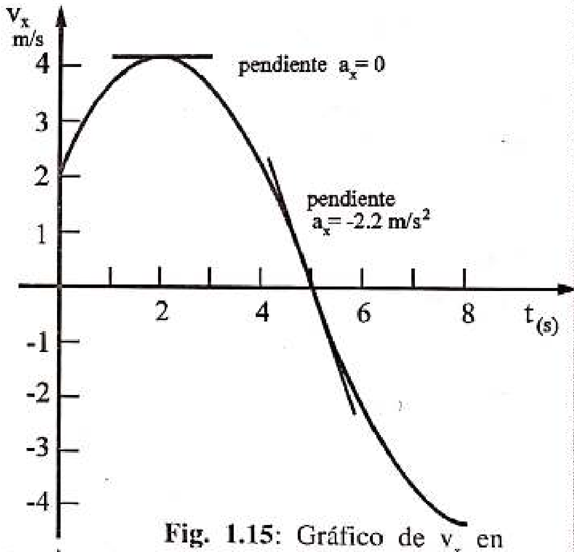


Fig. 1.15: Gráfico de v_x en función del tiempo t.

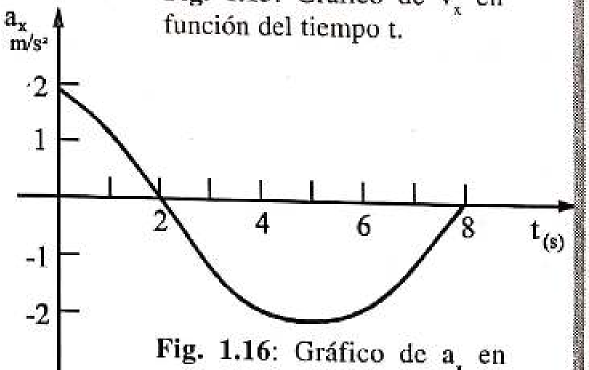


Fig. 1.16: Gráfico de a_x en función del tiempo t.

Dada la función x(t) que describe la posición en función del tiempo del movimiento de la partícula, representada gráficamente en la **Fig. 1.14**, se puede obtener a partir de ella la velocidad v_x para cada instante, calculando la pendiente de esa curva en dicho instante. De esta manera se construye el gráfico de v_x en función del tiempo como se observa en la **Fig. 1.15**. Por ejemplo, para los instantes 2, 5 y 7 segundos, los valores de las pendientes a la curva x(t) (**Fig. 1.14**) son los valores que adquiere la función $v_x(t)$ (**Fig. 1.15**). En forma análoga podemos proceder para conseguir la aceleración para cada instante, calculando la pendiente de la curva $v_x(t)$ en cada instante. La **Fig. 1.16** muestra la aceleración a_x en función de t obtenida a partir del cálculo de las pendientes a la curva $v_x(t)$ de la **Fig. 1.15**. Sobre esta figura están señalados explícitamente los valores de las pendientes para los instantes t = 2; 5 y 7 segundos.

1.7 RESUMEN

Hasta aquí, y con el propósito de estudiar el movimiento de la partícula hemos definido tres magnitudes físicas:

- **Posición.**
- **Velocidad.**
- **Aceleración.**

todas ellas en relación a un **sistema de referencia** espacio-temporal.

Cada movimiento quedará caracterizado por la particular manera en que el vector posición, que señala el punto del espacio en el cual se encuentra la partícula, se vincula con la variable tiempo; esto es, el movimiento de la partícula quedará completamente determinado si se sabe qué vector posición $\vec{r}$ corresponde a cada instante de tiempo t. Además, para cada intervalo de tiempo se puede asignar un vector velocidad media $\vec{v}_m(t)$ y aceleración media $\vec{a}_m(t)$ y para cada instante se puede definir la velocidad $\vec{v}(t)$ y la aceleración $\vec{a}(t)$ instantánea.

Esta información puede ser sistematizada en:

- **Tablas de valores.**
- **Gráficos.**

Estas son maneras diferentes y a veces complementarias de describir el movimiento. Todas ellas equivalen a una función matemática que llamamos ***ecuación horaria***:

$$\vec{r} = \vec{r}\,(t)$$

Conociendo la ecuación horaria, se puede calcular la velocidad media, para cualquier intervalo, como:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

que, para intervalos de tiempo muy pequeños, se acerca a la velocidad instantánea, asociada a cada punto de la trayectoria:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

De igual modo, a partir de $\vec{v}\,(t)$ se puede calcular la aceleración media e instantánea como:

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} \qquad \vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Recordar que el vector velocidad $\vec{v}$ es siempre tangente a la trayectoria y el vector aceleración está siempre dirigido hacia su parte cóncava.