APENDICE DE MATEMATICA

El propósito de este Apéndice es presentar algunas herramientas matemáticas que se utilizan en las explicaciones teóricas o en la resolución de problemas de ejercitación y ejemplos. Debe ser considerado un repaso de nociones conocidas que serán vistas simultáneamente en cursos de matemática.

CAPITULO 1 — ALGEBRA

1.1 NOCIONES ELEMENTALES

El álgebra es el conjunto de técnicas que usamos al realizar algún cálculo con números o para manejar operaciones del tipo suma, resta, multiplicación, división, potenciación, etc., con números o con símbolos (letras) constantes o variables.

Dentro de las nociones elementales deseamos repasar algunas técnicas que han sido objeto de estudio en las escuelas medias, pero que tienen todavía dificultades serias para la mayor parte de los estudiantes que ingresan a la Universidad.

Comenzamos con las operaciones usuales con números, por ejemplo:

$$\frac{3+5\cdot(7-9)-16/5}{12}=?$$

Aquí es necesario ante todo conocer el **orden** en que deben efectuarse los cálculos parciales. Para ello se han colocado los paréntesis en la operación parcial:

$$5\cdot(7-9)$$

donde primero debe efectuarse la resta encerrada por los paréntesis y multiplicar el resultado obtenido por 5.

O sea:

$$5\cdot(7-9)=5\cdot(-2)=-10$$

Aquí tenemos un ejemplo del producto (o multiplicación) de números de distinto signo: 5, que es positivo (lo que indicaremos en forma simbólica como $5 > 0$) y (-2), que es negativo (o sea, $-2 < 0$). Para conocer el signo del resultado, hay que usar la siguiente convención, en la cual suponemos que el "número simbólico" $a > 0$:

$$a \cdot a = a^2$$

$$a \cdot (-a) = -a^2$$

$$(-a) \cdot a = -a^2$$

$$(-a) \cdot (-a) = a^2$$

y lo mismo ocurre cuando se multiplican dos números a y b cualesquiera.

En realidad, la restricción $a > 0$ no es necesaria. Verifique que estas relaciones también son válidas si $a < 0$ y si $a = 0$.

Observe que es conveniente mantener el número negativo encerrado entre paréntesis para no confundir el tipo de operación.

$5\cdot(-2)$ ***correcto*** $\quad 5\cdot-2$ ***incorrecto***

Resuelta esta operación parcial nos queda:

$$\frac{3+5\cdot(7-9)-16/5}{12}=\frac{3-10-16/5}{12}$$

El numerador (la expresión que está sobre la barra horizontal) se puede interpretar de dos maneras ahora:

$$(3-10-16)/5 \quad ó \quad 3-10-(16/5)$$

Asumimos la siguiente convención para decidir en este tipo de casos: **de las operaciones indicadas se deben efectuar primero las potencias, luego los productos y/o divisiones y por último las sumas y restas, cuando no haya paréntesis que indiquen la prioridad de las operaciones.**

Así:

$$3 - 10 - 16/5 = 3 - 10 - (\ 16/5\ ) =$$

$$= 3 - 10 - 3{,}2 = -7 - 3{,}2 = -10{,}2$$

Finalmente nos queda:

$$\frac{3+5\cdot(7-9)-16/5}{12}=\frac{-10{,}2}{12}$$

Observe que hemos calculado el valor del numerador sin tocar para nada el denominador (la expresión -en este caso el número 12- que está bajo la barra horizontal).

Esto es nuevamente una aplicación de un orden de prioridad de las operaciones, que podemos indicar también así:

$$\frac{3+5\cdot(7-9)-16/5}{12}=\left[3+5\cdot(7-9)-16/5\right]/12$$

Realizando esta operación nos queda finalmente:

$$\frac{3+5\cdot(7-9)-16/5}{12}=10{,}2/12=-0{,}85$$

Note el signo del resultado y vincúlelo con la **regla de los signos** para el producto mencionado más arriba.

¿Qué pasa cuando el denominador consiste en una expresión numérica en lugar de ser un único número? Por ejemplo:

$$\frac{3+5\cdot(7-9)-16/5}{4-2\cdot(5/2+4)+8\cdot 3}=?$$

que podemos escribir:

$$[3 + 5 \cdot (7-9) - 16/5]\ /\ [4 - 2 \cdot (5/2 + 4) + 8 \cdot 3]$$

y calcular numerador y denominador por separado. El numerador es el mismo que en el ejemplo anterior, o sea, (–10,2), y el denominador es (observe el orden del cálculo):

$$4 - 2 \cdot (5/2 + 4) + 8 \cdot 3 =$$

$$= 4 - 2 \cdot (2{,}5 + 4) + 8 \cdot 3 =$$

$$= 4 - 2 \cdot 6{,}5 + 8 \cdot 3 = 4 - 13 + 8 \cdot 3 =$$

$$= 4 - 13 + 24 = 15$$

y entonces

$$\frac{3+5\cdot(7-9)-16/5}{4-2\cdot(5/2+4)+8\cdot 3}=-10{,}2/15=-0{,}68$$

A continuación resolvemos a modo de ejemplo el siguiente ejercicio 1.1.a:

$$\frac{16\cdot(3-1{,}8/2+0{,}5\cdot 4)+16\cdot(3{,}4-4)}{8/(12-7\cdot 1{,}5+2{,}5)-8\cdot(4{,}2-1{,}6/2+2{,}6)}=$$

$$=\frac{56}{-46}=-\frac{28}{23}\cong -1{,}2174$$

Este último ejemplo nos da ocasión para hablar sobre la simplificación:

¿por qué (–56/46) = (–28/23)*?*

Obsérvese que

$$56 = 28 \cdot 2 \ \text{ y } \ 46 = 23 \cdot 2\,,$$

de modo que:

$$\frac{-56}{46}=\frac{-28\cdot 2}{23\cdot 2}$$

y simplificamos el **factor común** 2 en el numerador y denominador. Sólo cuando **ambos**, numerador y denominador, tienen un factor común, la simplificación es lícita. Así, por ejemplo:

$\frac{32}{16}=2$ se puede representar como

$\frac{32}{16}=\frac{16\cdot 2}{16\cdot 1}$ y eliminamos el factor común 16

o también:

$$\frac{32}{16}=\frac{16\cdot 2}{8\cdot 2}=\frac{16}{8}=\frac{8\cdot 2}{4\cdot 2}=\frac{8}{4}=$$

$$=\frac{4\cdot 2}{2\cdot 2}=\frac{4}{2}=\frac{2\cdot 2}{1\cdot 2}=\frac{2}{1}=2$$

es una "simplificación" más larga, pero que lleva (como debe ser) al mismo resultado.

Volvamos ahora al ejercicio 1.1.a. ¿Hay posibilidades de simplificación antes de la simplificación final, que se realizó luego de calcular por separado numerador y denominador?

Para contestar esta pregunta debemos observar si es posible extraer **factores comunes**, comunes a denominador y numerador, como en el caso anterior, o comunes a los términos que constituyen numerador **o** denominador como veremos ahora:

Tomemos el numerador:

$$16 \cdot (3 - 1{,}8/2 + 0{,}5 \cdot 4) + 16 \cdot (3{,}4 - 4) = 56$$

que podemos escribir:

$$16 \cdot (...) + 16 \cdot (...)\ ,$$

enfatizando que **sí** hay un factor común a los dos sumandos, 16, de modo que podemos escribir:

$$16 \cdot (\quad) + 16 \cdot (\quad) = 16 \cdot [(\quad) + (\quad)]$$

o sea

$$16 \cdot (3 - 1{,}8/2 + 0{,}5 \cdot 4) + 16 \cdot (3{,}4 - 4) =$$

$$= 16 \cdot (3 - 1{,}8/2 + 0{,}5 \cdot 4 + 3{,}4 - 4)$$

Observe que hemos quitado los paréntesis interiores que, para sumas y restas, no hacen falta.

Veamos si podemos proceder en forma similar con el denominador:

$$8/(12 - 7 \cdot 1{,}5 + 2{,}5) - 8 \cdot (4{,}2 - 1{,}6/2 + 2{,}6) = -46$$

que podemos escribir:

$$8/(\quad) - 8 \cdot (\quad).$$

Acá puede haber duda, porque el primer 8 está dividido por algo en lugar de multiplicar algo como en el caso del numerador. Pero

$$8/(...) = 8 \cdot [1/(...)]$$

(Ej.: $8/3{,}2 = 8 \cdot (1/3{,}2)$ *¡verifíquelo!*)

y entonces 8 es factor común y podemos escribir

$$8/(12 - 7 \cdot 1{,}5 + 2{,}5) - 8 \cdot (4{,}2 - 1{,}6/2 + 2{,}6) =$$

$$= 8 \cdot [1/(12 - 7 \cdot 1{,}5 + 2{,}5) - (4{,}2 - 1{,}6/2 + 2{,}6)]$$

¿Podemos simplificar más esta expresión? Observe el paréntesis precedido de un signo menos. Podemos quitarlo, y al signo, cambiando todos los signos de los números dentro de él, es decir

$$-(4{,}2 - 1{,}6/2 + 2{,}6) = -4{,}2 + 1{,}6/2 - 2{,}6$$

(¡verifíquelo!)

¿Por qué podemos hacer esto? Porque:

$$-(...) = (-1) \cdot (...)$$

y entonces

$$-(4{,}2 - 1{,}6/2 + 2{,}6) = (-1) \cdot (4{,}2 - 1{,}6/2 + 2{,}6)$$

Observe que (−1) es factor común de los términos interiores al paréntesis. Entonces podemos hacer la **operación inversa** a extraer factor común y tener:

$$-(4{,}2 - 1{,}6/2 + 2{,}6) =$$

$$= (-1) \cdot (4{,}2 - 1{,}6 + 2{,}6) =$$

$$= (-1) \cdot 4{,}2 - (-1) \cdot 1{,}6/2 + (-1) \cdot 2{,}6 =$$

$$= -4{,}2 + 1{,}6/2 - 2{,}6$$

Observe con cuidado el segundo término, donde hemos reemplazado a (−(−1)) por +1, y asocie esta operación con la "regla de los signos" que dimos con anterioridad.

En realidad esta última "simplificación" no simplifica demasiado la operatoria. Cuando hablamos de simplificar queremos decir obtener una expresión de más fácil cálculo. Como vimos, esto no siempre ocurre, y queda a su criterio decidir si en un caso dado se le facilitan las operaciones "simplificando" los términos comunes.

Veamos como quedó hasta ahora la expresión del ejercicio:

$$\frac{16(3-1{,}8/2+0{,}5\cdot 4)+16(3{,}4-4)}{8/(12-7\cdot 1{,}5+2{,}5)-8(4{,}2-1{,}6/2-2{,}6)} =$$

$$= \frac{16(3-1{,}8/2+0{,}5\cdot 4+3{,}4-4)}{8\left[1/(12-7\cdot 1{,}5+2{,}5)-4{,}2+1{,}6/2-2{,}6\right]}$$

y ahora podemos simplificar entre numerador y denominador el factor común 8 (ya que $8 \cdot 2 = 16$) y nos queda:

$$\frac{2\cdot(3-1{,}8/2+0{,}5\cdot 4+3{,}4-4)}{1/(12-7\cdot 1{,}5+2{,}5)-4{,}2+1{,}6/2-2{,}6}=$$

$$\frac{7}{(-5{,}75)}\cong -1{,}2174$$

igual que antes. Observe el resultado: Tiene muchas cifras (es igual a −1,217391304...) y lo hemos **truncado y redondeado**, de modo que es un resultado **aproximado** al real y por esa razón usamos el signo ≅ ¿Qué quiere decir truncar y redondear? **Truncar** significa eliminar cifras que son significativas pero que podemos considerar despreciables para la precisión de nuestros cálculos en algunos problemas de Física. En nuestro ejemplo hemos truncado las cifras 1304 del final. Y **redondear** significa que aproximamos las últimas dos cifras del número truncado a la decena más próxima. En nuestro caso

$$-1{,}21739\underline{1304}\ldots \xrightarrow{\text{Truncado}} -1{,}217\underline{39} \xrightarrow{\text{Redondeado}} -1{,}217\underline{40}$$

→ a la 5ª cifra decimal

Si hubiéramos truncado a la **cuarta** cifra decimal tendríamos:

$$-1{,}2173\underline{91304}\ \ldots\rightarrow\ -1{,}2173$$

Practique truncando y redondeando el número π:

$$\pi = 3{,}14159265358979\ldots$$

(que ya ha sido truncado y redondeado ... π es un número irracional, lo que significa que no puede expresarse como una fracción o cociente de enteros, en consecuencia tendrá infinitas cifras decimales no periódicas). Le damos algunos ejemplos:

$$\pi \cong 3{,}14$$
$$\pi \cong 3{,}1416$$
$$\pi \cong 3{,}141593$$
$$\pi \cong 3{,}1$$
$$\pi \cong 3$$

Recuerde que para simplificar entre numerador y denominador es necesario que haya un factor común, y al llamarlo **factor** queremos decir que es un número -o una expresión numérica- que multiplica a otro número o a otra expresión numérica; **común** significa que afecta a ambos.

Por ejemplo, si se tiene:

$$\frac{16+24}{8}$$

$$\frac{\overset{2}{\cancel{16}}+24}{\underset{1}{\cancel{8}}}=26 \quad \text{es incorrecto}$$

El procedimiento correcto es

$$\frac{16+24}{8}=\frac{8.(2+3)}{8}=2+3=5$$

A pesar de ser una buena prática, recuerde que no es necesario simplificar para llegar a un resultado correcto. Si Ud. dispone de una calculadora, tal vez pierda menos tiempo y tenga menor probabilidad de error si usa la expresión original. Si no comete errores operativos, los cálculos deben dar el mismo resultado simplificando o no. Sin embargo, cuando se trata de expresiones simbólicas (con letras en vez de números), la simplificación permite obtener una comprensión más cabal de los resultados.

Vamos a extender estas operaciones al caso de expresiones simbólicas o literales, donde simbolizaremos a un número o a una expresión numérica mediante letras. Por ejemplo:

$$\frac{3a+b}{15c}=7 \qquad \text{donde:}$$

1) "a", "b", y "c" simbolizan a tres números, por ejemplo:

$$a=4;\ b=12;\ c=2$$

2) "3 a" significa "3 · a" , entonces

$$3\,a = 3\cdot a = 3\cdot 4 = 12 \ \textit{ya que}\ a=4$$

Luego,

$$\frac{3a+b}{15c}=\frac{3\cdot 4+12}{15\cdot 2}=0{,}8$$

¿Cuál es el uso de estos símbolos? Primero, en el caso de números de muchas cifras es más cómodo, al tener que operar algebraicamente con una expresión, escribir "a" en lugar del número mismo, y reemplazarlo al final de la operación cuando se desea realizar el cálculo propiamente dicho. Segundo, en la física hay constantes universales, o sea números (medidas) que aparecen muy seguido en las expresiones matemáticas, como por ejemplo la aceleración de la gravedad sobre la superficie terrestre: $g = 9{,}8\ m/s^2$, y generalmente hablamos de "g" al referirnos a este número. Y tercero y acaso más fundamental, porque la forma matemática de una expresión es más clara y permite obtener una comprensión más acabada de qué se está calculando, cuando se trabaja con símbolos literales. Cuarto, hay expresiones que son siempre las mismas, aunque los datos numéricos a veces cambien.

Hasta aquí hemos visto símbolos de números dados y conocidos, como en el ejemplo anterior, es decir que a, b, y c son datos del problema. Hay otros casos en que el objetivo del cálculo es obtener el valor numérico de un símbolo literal, como por ejemplo:

$$x = \frac{2+3}{6-4} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

Esto es lo que denominamos una **ecuación**. La idea es saber cuál es el número representado por el símbolo "x" que satisface la igualdad. En el ejemplo anterior podemos confirmar, por ejemplo el valor de "b", conociendo "a", "c" y la relación $(3a + b)/15\,c = 0{,}8$. Para hacer esto, despejamos b:

$$\frac{3a+b}{15c} = 0{,}8 \Rightarrow 3a + b =$$
$$= 0{,}8 \cdot 15c \Rightarrow b = 0{,}8 \cdot 15c - 3a$$

Reemplazando c y a por sus valores numéricos:

$$b = 0{,}8 \cdot 15 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = 12$$

que es el valor asignado a **b** en el ejemplo. En la jerga matemática, el obtener el valor numérico de un símbolo a partir de una ecuación que involucre números y/u otros símbolos, se denomina "despejar la incógnita". Así, deseamos calcular la incógnita x de la ecuación:

$$x = \frac{3+2}{6-4} \quad \text{y el valor de la incógnita es}$$

$$x = 2{,}5$$

Vamos a ver otros ejemplos de ecuaciones como ejercitación. La idea en todos ellos es despejar la incógnita x:

a) $x - 1 = 3\,x - 21$

b) $2\,(x - 1) = 3\,(x + 2)$

Pasando de miembro (observe que todos los términos que pasamos son sumandos o sustraendos de la expresión)

a) $x - 1 = 3\,x - 21 \Rightarrow 3\,x - 21 = x - 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3\,x - 21 - x = -1 \Rightarrow 3\,x - x = -1 + 21$$
$$\Rightarrow 2\,x = 20 \Rightarrow x = 20/2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = 10$$

b) $2\,(x - 1) - 3\,(x + 2) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2\,(x - 1) = 3\,(x + 2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\,x - 2 = 3\,x + 6 \Rightarrow$$
$$-2 - 6 = 3\,x - 2\,x \Rightarrow -8 = x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = -8$$

Tal vez todo hasta aquí sea claro, salvo los **pasajes de miembro**. Suelen producirse dificultades al pasar un término de un miembro de una igualdad al otro. Son errores típicos y frecuentes en los exámenes. En el ejemplo parece claro que:

* Si 21 está restando en el primer miembro de

$$3\,x - 21 - x = -1$$

pasa sumando al segundo miembro:

$$3\,x - x = -1 + 21$$

* Si 2 está multiplicando en el primer miembro de $2\,x = 20$, pasa dividiendo al segundo miembro:

$$x = 20/2$$

pero ¿cómo pasamos de miembro a x en la siguiente expresión?

$$2\,x + 5 = 12 + 3\,a\,x$$

Para hacerlo, recordemos el orden en que realizamos las operaciones: suponiendo que conocemos "a" y "x", para calcular el segundo miembro tenemos primero que multiplicar $3 \cdot a \cdot x$, y **después** sumar este resultado a 12. Si queremos conservar la misma expresión al realizar el pasaje de miembro, debemos respetar este orden. Así, explicitando la prioridad de la operación con paréntesis, podemos escribir:

$$(2\,x) + 5 = 12 + (3\,a\,x)$$

Cada paréntesis (o número) es ahora un sumando, y podemos hacer el pasaje de miembro como en el ejemplo anterior:

$$(2\,x) + 5 - (3\,a\,x) = 12$$

y eliminando los paréntesis y sacando factor común "x" en el primer miembro:

$$x\,(2 - 3\,a) + 5 = 12$$

y podemos despejar x (observe los pasajes de miembro)

$$x\,(2 - 3\,a) = 12 - 5 = 7$$

Hay quienes prefieren hacer los despejes mediante el artificio equivalente, pero mas fácilmente comprensible, de **hacer la misma operación** a los dos miembros:

$$2\,x + 5 = 12 + 3\,a\,x$$

resto $3\,a\,x$, a ambos:

$$\underbrace{2\,x - 3\,a\,x}_{\text{esto es: } x\,(2-3\,a)} + 5 = 12 + \underbrace{3\,a\,x - 3\,a\,x}_{\text{esto se va}}$$

resto 5 a ambos miembros:

$$x\,(2 - 3\,a) + 5 = 12$$

$$x\,(2 - 3\,a) = 7$$

divido a ambos miembros por $(2 - 3\,a)$:

$$x = \frac{7}{2 - 3a}$$

–... y llegamos, como era de esperar, a lo mismo.

Ejercítese -especialmente en los pasajes de términos- resolviendo los ejercicios propuestos al final del Capítulo, serie 1.1.

Las ecuaciones que te propusimos resolver en el párrafo anterior, tienen un sólo símbolo literal, la incógnita x, pero puede haber (y los hay) casos en que existan otros símbolos literales de valor conocido. Volviendo al primer ejemplo, podríamos escribir:

$$x = \frac{3a + b}{15c}$$

donde, como antes, a = 4; b = 12 y c = 2. Entonces, como antes,

$$x = \frac{3 \cdot 4 + 12}{15 \cdot 2} = 0{,}8$$

Veamos otro ejemplo:

$$a\,x + b = c\,x + d$$

donde deseamos despejar x en función de a, b, c y d, cuyos valores numéricos suponemos conocidos.

$$a\,x + b = c\,x + d \;\Rightarrow\; a\,x - c\,x + b = d \;\Rightarrow$$

$$a\,x - c\,x = d - b \;\Rightarrow\; x\,(a - c) = d - b \Rightarrow$$

$$x = \frac{d - b}{a - c}$$

¿Es este resultado el mismo que $x = \dfrac{b - d}{c - a}$?

(Respuesta: Sí)

Reemplazando los valores numéricos de a, b, c y d obtendríamos el valor numérico de x.

Estas ecuaciones que hemos visto plantean el cálculo del valor numérico de **una** incógnita que hemos llamado x. ¿Podemos con **una única ecuación** despejar más de **una** incógnita? La respuesta es que **no** podemos hacerlo. Veamos el ejemplo anterior:

$$a\,x + b = c\,x + y$$

donde hemos escrito "**y**" en lugar de "**d**", y supongamos a = 6; b = 2; c = 4. En esta ecuación no conocemos los valores numéricos de **x** ni de **y**. Al despejar **x** obtenemos, como antes:

$x = \dfrac{y-b}{a-c}$ y reemplazando los valores conocidos:

$$x = \frac{y-2}{6-4} = \frac{y-2}{2} = \frac{1}{2}y - 1$$

O sea que no podemos obtener un valor numérico para x al no conocer el valor numérico de y. Análogamente, si ahora intentamos despejar y:

$$a\,x + b = c\,x + y \;\Rightarrow\; a\,x + b - c\,x = y \Rightarrow$$

$$y = b + (a - c)\,x$$

y reemplazando los valores numéricos disponibles: $y = 2 + 2\,x$ (verifique que esta relación es la misma que la que encontramos anteriormente al despejar **x**). Nuevamente, al no conocer el valor numérico de **x**, no podemos obtener el valor numérico de **y**. Aparentemente el problema de hallar los valores numéricos de dos incógnitas con una ecuación no tiene generalmente solución única. Pero esta ecuación sí tiene solución, en el sentido que podemos encontrar pares de valores numéricos para **x** e **y** que la satisfacen, por ejemplo:

$$x = 1;\quad y = 4$$
$$x = 0;\quad y = 2$$
$$x = 2;\quad y = 6$$
$$x = -4;\quad y = 0$$

etc, etc

Cada uno de estos pares de valores es solución y entonces nos encontramos con que en lugar de tener **una** solución, como ocurrió hasta ahora con la ecuación con una incógnita, tenemos muchas soluciones, en realidad infinitas soluciones. Esto siempre ocurre con una ecuación con **dos** incógnitas (*1). Naturalmente es imposible escribir las infinitas soluciones, pero existe un método de **representar** estas soluciones que es cómodo y útil para visualizarlas rápidamente. Este caso es el de las ...

1.2 INTERPRETACIONES GRAFICAS

Supongamos que trazamos un par de líneas rectas y perpendiculares entre sí, como en la **Fig.1.1**, y las subdividimos en partes iguales como las marcas de una regla. Es más, como las vamos a utilizar como reglas, una horizontal y otra vertical, adjudicamos números a las divisiones, con la elección (convencional) de poner el número **0** para ambas reglas en el punto de cruce.

También para saber de qué lado del **0** estamos, si a la derecha o a la izquierda en el caso de la recta horizontal, o si hacia arriba o hacia abajo en el caso de la recta vertical, le asignamos **signo** a los números que colocamos sobre las divisiones.

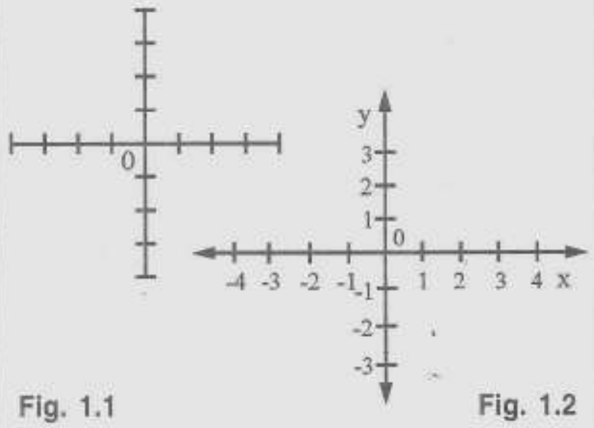


Fig. 1.1 Fig. 1.2

La forma más común de hacerlo es dando (arbitrariamente) signo negativo a las divisiones de la recta horizontal que están a la izquierda del cero y a las divisiones de la recta vertical que están por debajo del cero. Pueden cambiarse estas convenciones por la que resulte más cómoda ante cada problema físico.

Nos queda entonces algo así, que llamamos "ejes cartesianos":

¿Para qué nos sirve esto? Supongamos además que tenemos una ecuación con dos incógnitas como en el último ejemplo:

$$y = 2\,x + 2$$

* 1. Un ejemlo de una sola ecuación con dos incógnitas que tienen solución única es $x^2 + y^2 = 0$. Solución: $x = 0$ e $y = 0$.

Vamos a obtener una **representación gráfica** de esta ecuación suponiendo que los valores de **x** están representados por la regla horizontal (que en la jerga matemática se llama **eje de abscisas**) y que los valores de **y** están representados por la regla vertical (el llamado **eje de ordenadas**). Para señalar esta identificación, escribimos "x" sobre la recta horizontal e "y" sobre la vertical, como indicamos en la figura. Las flechas sobre los ejes indican los sentidos positivos. Consideremos ahora qué pasa con nuestra ecuación si, por ejemplo, x = 1.

En tal caso:

$$y = 2\,x + 2 = 2\,.\,1 + 2 = 4$$

Esto significa que al valor x = 1 corresponde, a través de la ecuación, el valor y = 4.

La representación gráfica de esta corres-pondencia consiste en marcar en el plano que determinan nuestros ejes cartesianos un punto, correspondiente a las divisiones que simbolizan x = 1 e y = 4, como se ha hecho en la **Fig. 1.3** (punto A).

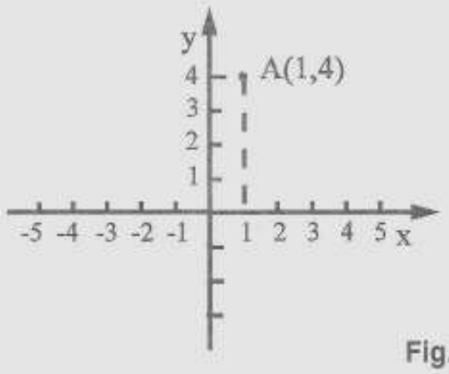


Fig. 1.3

Podemos marcar todos los otros "puntos" que correspondan a pares (x,y) que satisfacen la ecuación, como las que habíamos señalado antes:

$x = 0; \quad y = 2$ (punto B)

$x = -1; \quad y = 0$ (punto C)

Si tuviéramos el tiempo y la posibilidad de marcar todos los puntos de este plano que representan la ecuación:

$$y = 2\,x + 2,$$

observaríamos que se forma una **línea recta** como gráfica de la ecuación. Como resulta una recta, decimos que nuestra ecuación es la ecuación de una recta. En realidad toda ecuación del tipo:

$$y = m\,x + b$$

donde **m** y **b** representan números dados, tiene como representación una línea recta en el gráfico cartesiano.

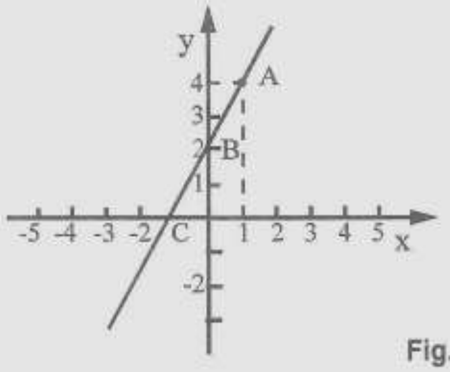


Fig. 1.4

La reciproca no es cierta: no toda línea recta en el plano cartesiano puede represen-tarse por la ecuación $y = m\,x + b$.

La excepción está dada por las rectas **verticales**, para cuyos puntos, **y** puede ser cualquiera, mientrasque **x** está fija, y la ecuación que las representa es:

$$x = x_1$$
$$x = x_2$$
$$x = x_3$$
.
.
.

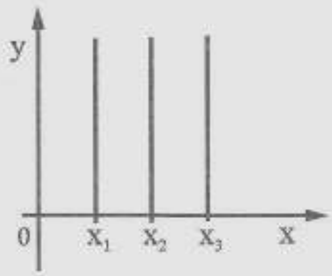


Fig. 1.5

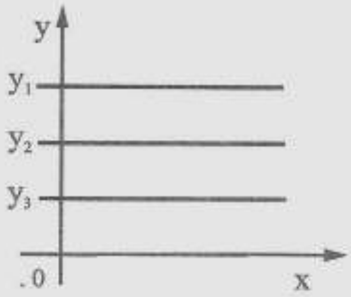


Fig. 1.6

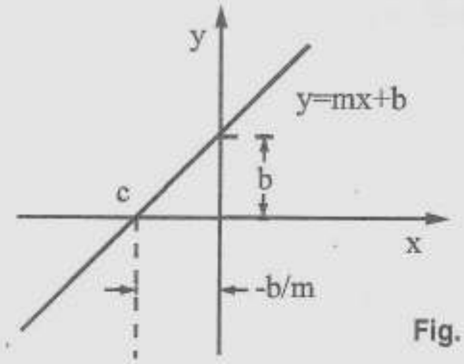


Fig. 1.7

En las rectas **horizontales**, del mismo modo, **y** está fija mientras que **x** puede ser cualquiera:

$$y = y_1$$
$$y = y_2$$
$$y = y_3$$
$$\vdots$$

Pero estas ecuaciones corresponden, en la ecuación general:

$$y = mx + b, \quad \text{a tener } m = 0;$$

$$b = y_1, \text{ ó } b = y_2, \text{ etc.}$$

Diremos que la ecuación general de la recta $y = m\,x + b$ (con la excepción dada) es una **ecuación lineal**, para diferenciarla de otras ecuaciones, por ejemplo, $y = ax^3 + cx^2$, donde al menos una de las dos incógnitas aparece elevada a una potencia que no es 1, y que veremos en el caso más sencillo, más adelante.

En ésta expresión la palabra lineal debe entenderse como relacionada con la línea recta, y no otras líneas curvas.

Por supuesto, nadie va a tomar los infinitos puntos que representan los pares (x,y) que satisfacen la ecuación. Como sabemos que se trata de una recta, basta conocer dos puntos de la misma para determinarla, por ejemplo, los puntos A y B (ó A y C ó B y C) de la **Fig. 1.4** y viceversa, a partir de la representación es posible obtener la ecuación correspondiente. Para ver este procedimiento, vamos a analizar el significado de las dos cantidades **m** y **b** que figuran en la ecuación general de la recta

$$\boxed{y = m\,x + b}$$

Podemos observar, primero, que para $x = 0$, el valor correspondiente de **y** es $y = b$. Este punto ($x = 0$; $y = b$) corresponde al punto B de nuestra representación anterior y es el punto en que la recta corta al eje de ordenadas. La distancia medida sobre la regla vertical entre tal punto y el cero es justamente b. Como al punto cero de cruce de los ejes cartesianos también se denomina origen de los ejes, a esta distancia suele llamársele **ordenada al origen**. La situación se ilustra en la **Fig.1.7**, donde no hemos colocado números por estar trabajando con un ejemplo con cantidades simbólicas.

¿Qué pasa cuando $y = 0$? De la ecuación de la recta,

$$y = 0 \;\Rightarrow\; m\,x + b = 0 \;\Rightarrow\; x = -b/m$$

lo que quiere decir que el punto ($x = -b/m$, $y = 0$) pertenece a la recta (o satisface la ecuación). Este punto es el llamado C en la **Fig.1.4**, la **abscisa al origen**, el punto donde la recta corta al eje de abscisas.

Entonces, para representar una recta de ecuación $y = m\,x + b$ podemos determinar dos puntos:

ordenada al origen ($x = 0$; $y = b$)
abscisa al origen ($x = -b/m$; $y = 0$)

sobre el plano cartesiano y trazar la recta uniéndolos. ¿Qué pasa si $b = 0$, o sea $y = m\,x$?

Si $y = m\,x$, para cada valor de m tenemos una recta que pasa por el origen de los ejes cartesianos y de este modo definimos todas las rectas (excepto la vertical) que pasan por el punto ($x = 0$; $y = 0$), de las que se han representado dos en la **Fig. 1.8**. Observe que hemos puesto m_1 y m_2 para distinguirlas.

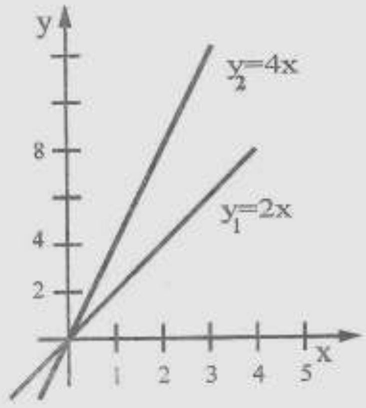


Fig. 1.8

Para saber cómo puede hacerse esta distinción y qué consecuencias tiene en la representación gráfica, vamos a usar un ejemplo numérico:

Sean $y_1 = 2x$ e $y_2 = 4x$ las dos rectas de la **Fig. 1.9**. Ambas responden a la forma general: $y = mx$, y pasan por el origen cero.

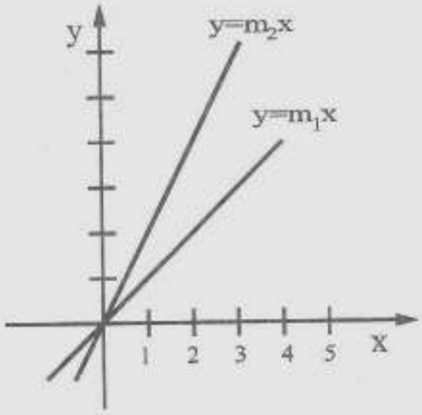


Fig. 1.9

Para

$$x = 1 \Rightarrow y_1 = 2;\ y_2 = 4$$

$$x = 2 \Rightarrow y_1 = 4;\ y_2 = 8$$

y se ve que para todo valor $x > 0$ (positivo) el correspondiente valor de y_1 es menor que el correspondiente valor de y_2. Pero de las ecuaciones respectivas, observamos que esta relación también se cumple con los m, 2 y 4. O sea que cuanto mayor sea m, más empinada es la recta.

Observe que en el caso general (consideremos por ahora positivas a m_1 y m_2)

$$y_1 = m_1 x \qquad\qquad y_2 = m_2 x$$

para un **x** dado, los valores correspondientes de $\mathbf{y_1}$ e $\mathbf{y_2}$ satisfacen la relación:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{m_1}{m_2}$$

y por lo tanto, si

$$m_2 > m_1 \Rightarrow y_2 > y_1$$

Como la cantidad m da información acerca de cuán empinada es la recta, se la denomina **pendiente** de la recta. O sea que visualmente, en **una misma** representación gráfica, podemos distinguir que una recta tiene mayor pendiente que otra. ¿Y por qué en **una misma** representación gráfica? Observe las siguientes figuras:

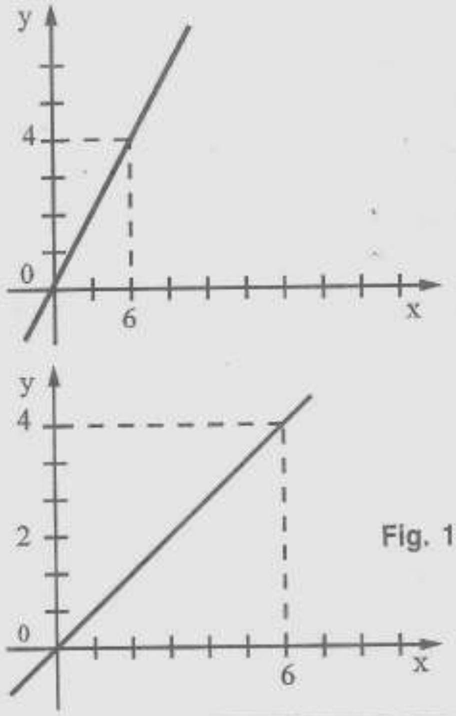


Fig. 1.10

A primera vista se diría que la recta del gráfico superior tiene mayor pendiente que la del inferior. Sin embargo ambas son representaciones gráficas de la **misma** recta, $y = 2/3\ x$; observe que ambas pasan por el origen y por el punto ($x = 4$, $y = 6$). Lo que pasa es que la regla de la gráfica de la izquierda tiene divisiones más pequeñas que la otra. Decimos que la **escala** de los gráficos es diferente.

Lo mismo ocurriría si hubiésemos cambiado la escala del eje de ordenadas. Entonces la comparación visual **sólo** tiene sentido si los ejes de ambas representaciones tienen la misma escala, o sea la misma unidad de medida. A esto nos referimos antes al hablar de **una misma** representación gráfica.

Tenemos así que las cantidades m (pendiente) y b (ordenada al origen) de la ecuación de la recta $y = m x + b$ caracterizan completamente a la recta: la pendiente da (en la escala de la representación) la inclinación de la recta respecto del eje horizontal o de abscisas y la ordenada al origen es la distancia al origen con que la recta corta al eje vertical o de ordenadas.

Sería conveniente que realice los ejercios de la serie 1.2, antes de seguir el desarrollo de estos temas.

Veamos por ejemplo, el 1.2.b)

$$x/3 - y_2/5 = 1 \Rightarrow x/3 - 1 = y_2/5 \Rightarrow$$
$$y_2 = 5/3\, x - 5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b = -5; \quad m = 5/3$$

de donde la ordenada al origen es $b=-5$ y la abscisa al origen es $(-b/m)=3$, y la representación gráfica de la recta se muestra en la **Fig. 1.11**.

Otra forma posible de representar rectas en el plano cartesiano es usar directamente la ordenada al origen y la **pendiente** que, como hemos dicho, está relacionada con la inclinación de la recta respecto del eje horizontal.

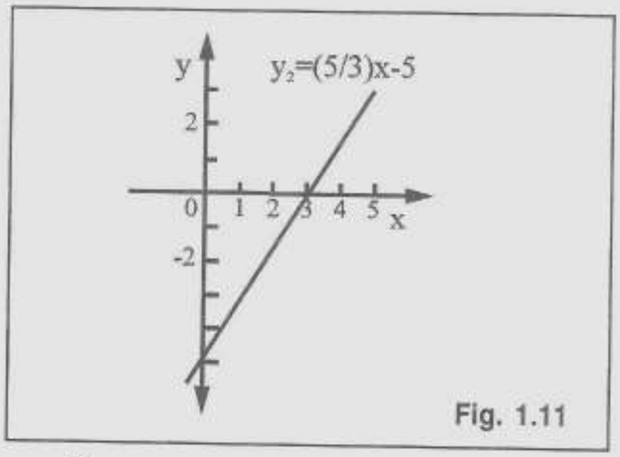


Fig. 1.11

Para expresar esta relación debemos hacer una incursión en el terreno de la ...

1.3 TRIGONOMETRIA ELEMENTAL

La **trigonometría** es una rama de la matemática asociada al estudio de las propiedades de los triángulos (tri: tres, gono: ángulo, metro: medir). Consideremos, para ejemplificar la situación, la representación gráfica de dos rectas con la misma ordenada al origen:

$$y_1 = m_1 x + b \;;\; y_2 = m_2 x + b$$

Sabemos que la recta será más empinada (mayor inclinación respecto del eje x) cuanto mayor sea su pendiente, de modo que en la **Fig.1.12** se cumple que

$$m_2 > m_1, \text{ ambas positivas}$$

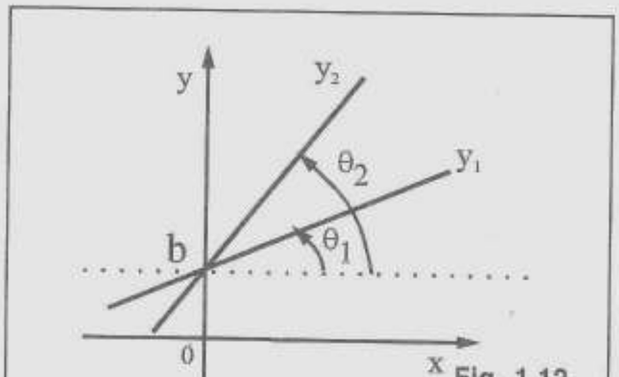


Fig. 1.12

También podemos medir esa inclinación con el **ángulo** θ que la recta forma con el eje x. Observe la convención con que se mide θ: a partir de la parte positiva del eje **x** y en sentido antihorario, **Fig. 1.13**.

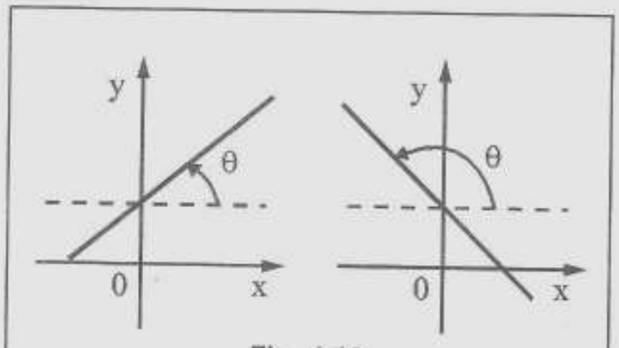


Fig. 1.13

En nuestro ejemplo para las dos rectas de la **Fig.1.12**

$$\theta_2 > \theta_1$$

Ahora deseamos establecer una relación matemática entre m y θ para cualquier recta. Consideramos entonces dos puntos cualesquiera (x_1,y_1) y (x_2,y_2) pertenecientes a la recta, **Fig.1.14**. Para ahorrar escritura simbolizaremos los **incrementos** (aumentos) en las variables coordenadas con:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

y usando la ecuación de la recta

$$y = m x + b$$

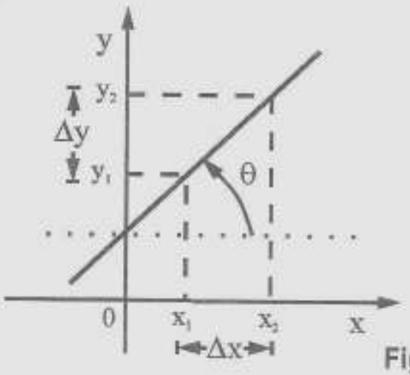


Fig. 1.14

podemos escribir:

$$y_2 = m x_2 + b$$
$$y_1 = m x_1 + b$$

Restando miembro a miembro estas dos ecuaciones tenemos:

$$y_2 - y_1 = (m x_2 + b) - (m x_1 + b) = m(x_2 - x_1)$$

o sea:

$$\Delta y = m\Delta x \qquad m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

es decir que la pendiente de la recta es igual al cociente de incrementos, y observe que, como los puntos tomados para definirlos son cualesquiera, esta relación es independiente de los valores (x_1,y_1), (x_2,y_2) y es una propiedad de la recta misma.

Dado que los ejes **x**, **y** (y por lo tanto también los segmentos Δx y Δy) son pependiculares entre sí resulta un triángulo rectángulo de catetos de longitud igual a Δx y Δy, respectivamente, e hipotenusa dada por el tramo de la recta entre los dos puntos considerados, **Fig. 1.15**.

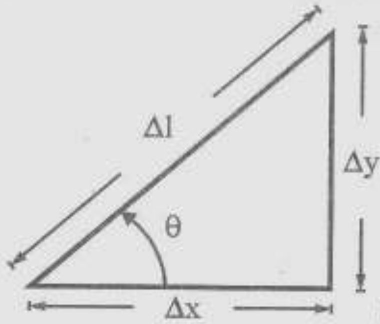


Fig. 1.15

La longitud Δl de esta hipotenusa se puede obtener mediante el **Teorema de Pitágoras**:

$$\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$$

Por otra parte, Δx y Δy están relacionados entre sí por la pendiente de la recta:

$$\Delta y = m\ \Delta x.$$

Estas dos relaciones entre las longitudes Δx, Δy, y Δl han surgido hasta ahora en forma geométrica. Podemos obtener otras relaciones **definiendo** las **funciones trigonométricas** asociadas al ángulo θ:

$$\text{seno}\,\theta = \text{sen}\,\theta = \frac{\Delta y}{\Delta l}$$

$$\text{coseno}\,\theta = \cos\theta = \frac{\Delta x}{\Delta l}$$

$$\text{tangente}\,\theta = \text{tg}\,\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow m = \text{tg}\,\theta$$

Repetimos: estas son definiciones. Hay otras funciones trigonométricas que pueden derivarse de estas fundamentales, pero que no son imprescindibles para nuestro curso.

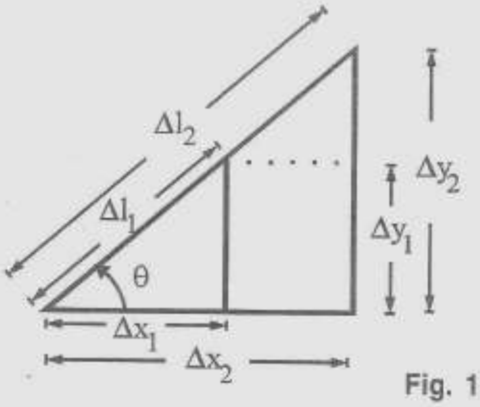


Fig. 1.16

Las funciones trigonométricas dependen exclusivamente del ángulo considerado. Para demostrarlo consideremos los dos triángulos de la **Fig 1.16**, que comparten el ángulo θ: el triángulo mayor definido por Δx_2, Δy_2 y Δl_2 y el triángulo menor definido por Δx_1, Δy_1 y Δl_1. Puede observar que estos triángulos se extraen de la misma recta, $y = mx + b$, tomando incrementos diferentes en las variables **x** e **y**.

Entonces

$$m = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \frac{\Delta y_2}{\Delta x_2}$$

y se ve que la relación $\Delta y/\Delta x$, que da la tangente del ángulo θ es la misma para cualquier Δy y cualquier Δx, es una relación que depende únicamente de la pendiente de la recta o, lo que es lo mismo, del ángulo θ. Así la función tgθ calculada con cualquier triángulo rectángulo que deseemos construir, da siempre el mismo valor.

Veamos qué pasa con las otras funciones trigonométricas:

tenemos: $$\cos\theta = \frac{\Delta x_1}{\Delta l_1}$$

pero

$$\Delta l_1 = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta y_1^2} = $$
$$= \sqrt{\Delta x_1^2 + (m\,\Delta x_1)^2} = \Delta x_1\sqrt{1+m^2}$$

donde se ha usado que $\Delta y_1 = m\ \Delta x_1$.

Análogamente

$$\Delta l_2 = \Delta x_2\sqrt{1+m^2}$$

y entonces

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta l_1} = \frac{\Delta x_2}{\Delta l_2} = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} = \cos\theta$$

y nuevamente la función trigonométrica coseno no depende de los valores particulares de Δx y Δy. Finalmente, notemos que:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\Delta y}{\Delta l} = \left[\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\left(\frac{\Delta x}{\Delta l}\right)\right] = \operatorname{tg}\theta\cos\theta$$

$$\left(\Rightarrow \operatorname{sen}\theta = m\frac{1}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}\right)$$

y como tg θ y cos θ son funciones independientes de los valores de Δx y Δy, sen θ también lo será. Las funciones trigonométricas dependen exclusivamente del ángulo θ al que están asociadas.

Del procedimiento anterior podemos resumir las siguientes relaciones de las funciones trigonométricas con la pendiente de la recta:

$$\operatorname{tg}\theta = m$$
$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$$
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$$

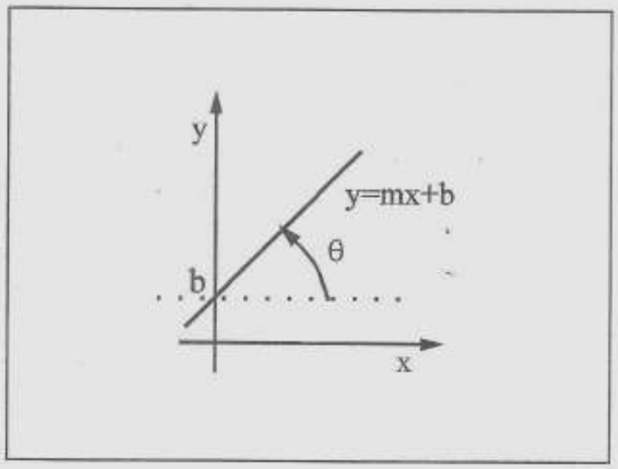


Fig. 1.17

y las siguientes relaciones entre las mismas funciones trigonométricas (¡dedúzcalas!)

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}} \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \left(\frac{1}{\cos\theta}\right)\sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}-1}$$

NOTAS:

A) Hemos identificado la pendiente **m** de la recta con la tangente trigonométrica del ángulo θ que forma con el eje horizontal. En rigor, esto no siempre es correcto y es una fuente habitual de confusión por dos motivos:

i) Las magnitudes asociadas a los ejes cartesianos. La función tg θ no tiene dimensiones (o unidades) porque se trata de un cociente entre longitudes, $\Delta y/\Delta x$. Por otra parte, en Física graficamos funciones que sí tienen unidades. Por ejemplo, la velocidad de una partícula con aceleración constante varía en el tiempo según la expresión:

$$v(t) = v_0 + a\,t$$

donde v_0 es la velocidad inicial $v_0 = v(0)$, "**a**" la aceleración y **t** el tiempo. Si graficamos esta relación en un diagrama cartesiano, llevando t en abscisas y v en ordenadas, la gráfica resulta una línea recta. La pendiente de esta recta es la aceleración del movimiento.

$$m = a$$

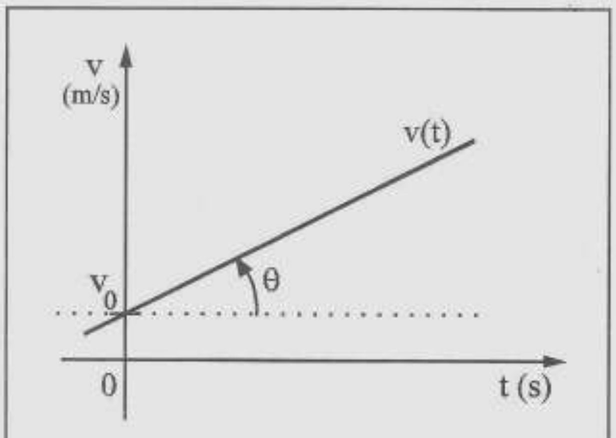


Fig. 1.18

y por tanto, está medida en unidades de aceleración, es decir, en, por ejemplo, m/s². Por otra parte, la función tg no tiene unidades. Entonces, hablamos más rigurosamente si decimos que la pendiente de la recta es **proporcional** a tg θ, en lugar de decir que son **iguales**. Por ejemplo sabemos que el ángulo cuya tangente es 1 es de 45°.

¿Pero qué ángulo tendrá como tangente a 1 m/s²?. No lo hay. En todos los casos de interés para la Física, los ejes cartesianos representan magnitudes físicas y tienen unidades, de modo que hay que tener cuidado de no confundir la pendiente como relación de cantidades geométricas. Además, tenemos un segundo problema, que es

ii) la **escala** del dibujo, sobre la cual ya hemos hablado. Los dos gráficos de la figura representan el mismo movimiento, pero las escalas (es decir, la longitud que representa a la unidad de medida) de los ejes horizontales correspondientes al tiempo son distintas, y por lo tanto, son distintos los ángulos de inclinación θ de las rectas y sus tangentes trigonométricas respectivas.

Sin embargo las pendientes, que dan la aceleración del movimiento, son iguales por tratarse del mismo movimiento: 10 m/s².

Este problema también se salva considerando a la pendiente como **proporcional** a la

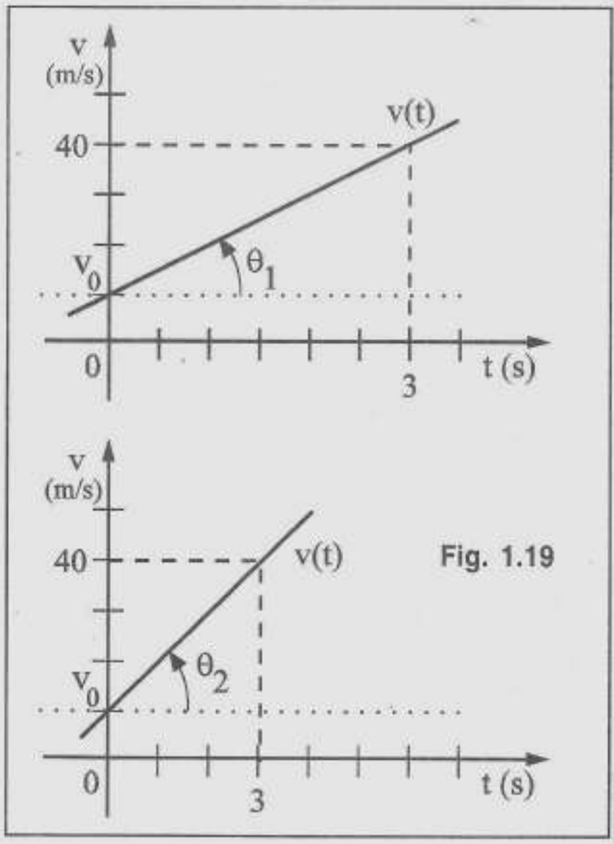


Fig. 1.19

tangente trigonométrica del ángulo de inclinación en la representación gráfica.

Para una gráfica dada, entonces, hay una constante de proporcionalidad entre **m** y tgθ: **m = C tg** θ. Esta constante C depende de:

- las unidades dimensionales de las magnitudes representadas sobre los ejes cartesianos.
- la escala del gráfico.

B) Sobre la medida de los ángulos:

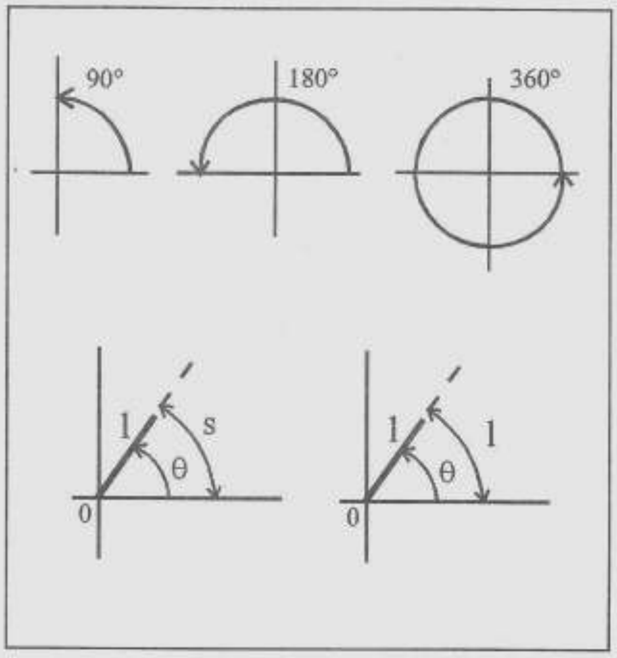


Fig. 1.20

EL uso corriente es medir los ángulos en grados, de modo que un ángulo recto corresponde a 90° y una vuelta completa a 360°. En cálculos científicos a menudo es conveniente usar otra unidad de medida que es el **radián**. Supongamos una barra de longitud l que gira alrededor de uno de sus extremos O. Se define al **radián** como el ángulo que gira la barra cuando la longitud del arco de circunferencia recorrido por el extremo libre es igual a la longitud de la barra, como se indica en la figura. Para cualquier ángulo barrido, su valor en radianes es igual al cociente entre la longitud del arco de circunferencia recorrido por el extremo libre y la longitud de la barra, o sea:

$$\theta \text{ (radianes)} = s / l$$

Para relacionar esta unidad de medida con los grados usuales, podemos notar que, cuando la barra gira una vuelta completa el ángulo barrido es de 360°, y la longitud recorrida por el extremo libre es $2\,\pi\, l$, la longitud de la circunferencia de radio l.

Entonces:

$$\theta \text{ (grados)} = 360°$$

$$2\,\pi \text{ radianes} = 360°$$

$$\theta \text{ (radianes)} = 2\,\pi\, l / l = 2\,\pi$$

y se tiene que:

1 radián = $360/2\pi$ grados $\cong 57°\ 17'\ 45''$

1 grado = $2\pi/360$ radianes $\cong$ 0,017453 radianes

Generalmente, el símbolo "rad" que indica la medición en radianes, se suprime en la escritura. Existen tablas de las funciones trigonométricas para ángulos en grados y en radianes, y todas las calculadoras que incluyen funciones trigonométricas pueden obtenerlas para ambas unidades de medida, y a veces una tercera unidad, llamada gradientes (grad).

Es conveniente que recuerde el valor en radianes de algunos ángulos de uso común:

$0° = 0$ rad	$90° = \pi/2$ rad
$30° = \pi/6$ rad	$120° = 2/3\,\pi$ rad
$45° = \pi/4$ rad	$135° = 3/4\,\pi$ rad
$60° = \pi/3$ rad	$150° = 5/6\,\pi$ rad
	$180° = \pi$ rad

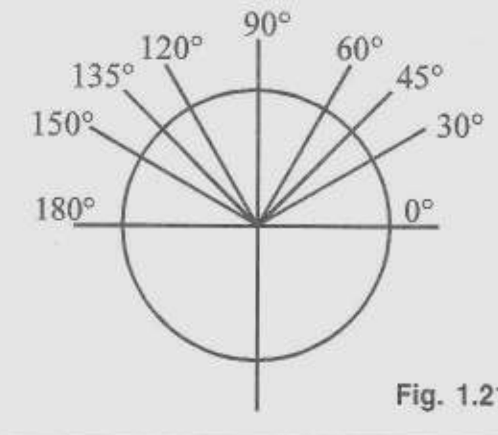


Fig. 1.21

1.4 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Cuando tenemos una ecuación lineal, o sea aquéllas en las que la incógnita aparece elevada solamente a la potencia cero o uno, con una incógnita siempre es posible, álgebra mediante, hallar la solución, es decir, el valor de la incógnita que satisface a la ecuación. Cuando se trata de una ecuación con dos incógnitas no existe en general solución única, sino infinitos pares de valores para las incógnitas que satisfacen la ecuación y podemos representar tal conjunto de soluciones mediante una recta en un diagrama cartesiano.

¿Qué pasa ahora si tenemos **dos** ecuaciones con **dos** incógnitas?.

Cada una de ellas puede representarse en un diagrama cartesiano mediante una recta, y expresarse en la forma

$$y = m_1 x + b_1$$

$$y = m_2 x + b_2$$

Veamos si este sistema tiene solución. Para ello tiene que haber (al menos) un par de valores (x, y) que satisfaga simultáneamente a ambas ecuaciones. Desde el punto de vista de la representación gráfica, como un par (x, y) que satisfaga a una de las ecuaciones es un punto de la recta que la representa, al tener que satisfacer a ambas ecuaciones debe ser un punto perteneciente a **ambas rectas**, es decir, es el punto de cruce de ambas rectas en la gráfica, si es que las rectas se cruzan.

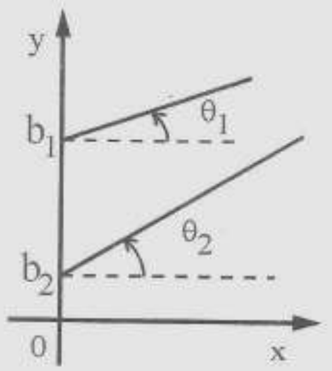


Fig. 1.23

A esta primera solución la llamaremos "solución analítica" y para hallarla procederemos con el denominado "método de sustitución" que quiere decir: despejar **y** en función de **x** en una de las ecuaciones (o al revés, **x** en función de **y** si resulta más fácil) y reemplazar la expresión obtenida en la otra ecuación, que queda entonces únicamente en términos de **x** (o de **y** en la otra versión) y entonces puede despejarse **x**.

Veamos cómo funciona el sistema :

$$y = m_1 x + b_1$$

$$y = m_2 x + b_2$$

Por ejemplo, despejemos **y** en función de **x** de la primera ecuación: esto ya está hecho por la forma que tiene. Ahora reemplazamos esta expresión para **y** en la segunda ecuación

$$m_1 x + b_1 = m_2 x + b_2$$

Despejamos **x**:

$$m_1 x - m_2 x = b_2 - b_1 \Rightarrow$$

$$x = (b_2 - b_1) / (m_1 - m_2)$$

Obsérvese que x es igual a una expresión que no contiene incógnitas: m_1, m_2, b_1 y b_2 son datos simbólicos conocidos.

Con este valor (que existirá y será único sólo en el caso en que $m_1 \neq m_2$) para **x** despejamos**y** en cualquiera de las ecuaciones originales:

$$\begin{aligned} & y = m_1 x + b_1 \Rightarrow \\ & \Rightarrow y = m_1 (b_2 - b_1)/(m_1 - m_2) + b_1 = \\ & = \frac{m_1(b_2 - b_1) + b_1(m_1 - m_2)}{m_1 - m_2} \end{aligned}$$

Entonces:

$$y = (m_1 b_2 - m_1 b_1 + m_1 b_1 - m_2 b_1)/(m_1 - m_2)$$

y simplificando:

$$y = (m_1 b_2 - m_2 b_1)/(m_1 - m_2)$$

que es el valor de y.

Luego el par

$$x = (b_2 - b_1)/(m_1 - m_2)$$

$$y = (m_1 b_2 - m_2 b_1)/(m_1 - m_2)$$

es la solución del problema, es única sólo en el caso ya mencionado en que las rectas se cruzan y no son paralelas o superpuestas.

La resolución gráfica consiste simplemente en dibujar las rectas representadas por las ecuaciones y determinar el punto de corte:

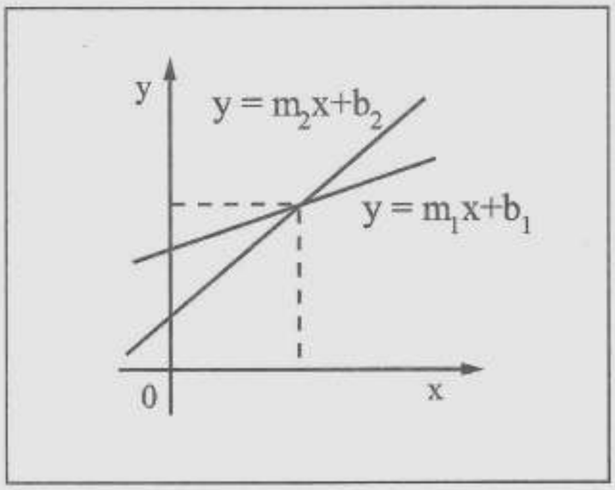


Fig. 1.24

De las ecuaciones que dan la solución al problema puede verse que hay un caso problemático: ¿qué pasa si $m_1 = m_2$? La diferencia $(m_1 - m_2)$ aparece en el denominador tanto para el valor solución de **x** como para el valor solución de **y**, y sabemos que no es posible dividir por cero. Llendo hacia atrás en nuestra álgebra volvemos al paso inicial donde:

$$m_1 x + b_1 = m_2 x + b_2$$

simplificando:

$$b_1 = b_2$$

pero esto no es generalmente cierto. Si originalmente $b_1 = b_2$, las dos ecuaciones representan la misma recta y entonces no tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas sino **una** ecuación con **dos** incógnitas escrita dos veces y hay infinitas soluciones (todos los puntos de la recta). Si originalmente $b_1 \neq b_2$ esta relación que obtuvimos es falsa y por lo tanto

$$m_1 x + b_1 \neq m_2 x + b_2$$

de modo que **no hay** solución.

Para verlo en la representación gráfica, observemos que

$$y = m_1 x + b_1 \qquad\qquad (b_1 \neq b_2)$$

$$y = m_2 x + b_2$$

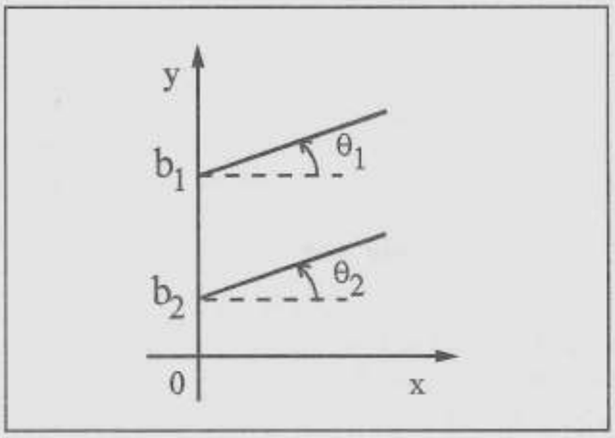


Fig 1.25

representan dos rectas de igual pendiente y distinta ordenada al origen, o sea, dos rectas paralelas, y las rectas paralelas no se cortan, lo que es otra forma de decir que el sistema no tiene solución, o sea, que no existe ningún par (x, y) que simultáneamente pertenezca a ambas rectas.

Cuando tenemos escritas las ecuaciones en la forma de ecuaciones de rectas, es fácil por inspección observar si las pendientes son iguales entre sí y decidir, antes de realizar el cálculo, si el sistema tiene o no solución.

En general, el problema de dos ecuaciones con dos incógnitas viene formulado de la siguiente manera:

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$

$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

donde a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 y c_2 son símbolos de valores numéricos conocidos. Le dejamos como ejercicio demostrar, usando el método de sustitución, que la solución de este sistema es:

$$x = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{b_1 a_2 - b_2 a_1} \qquad y = \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{b_1 a_2 - b_2 a_1}$$

y que la condición de solución inexistente (rectas paralelas) está dada por

$$a_1/b_1 = a_2/b_2$$

En la serie de ejercicios 1.4, al final del Cápitulo 1, puedes practicar con valores numéricos.

Así como para despejar **una** incógnita necesitamos **una** ecuación, para despejar **dos** incógnitas necesitamos **dos** ecuaciones, en general, si existe solución, para despejar un número cualquiera **N** de incógnitas se necesita disponer de **N** ecuaciones que las vinculen.

La rama de las matemáticas que estudia la resolución de estos sistemas complicados de N ecuaciones con N incógnitas se denomina **álgebra lineal**.

Dispone de poderosos métodos de cálculo basados en una sistematización del método de sustitución que hemos planteado para el caso N = 2. Desde ya que la cosa se complica a medida que aumentamos N, pero la filosofía del procedimiento es siempre la misma: despejar una incógnita en términos de las otras, sustituir en las ecuaciones originales y simplificar, con lo que se obtiene un sistema de (N–1) ecuaciones con (N–1) incógnitas. Repitiendo el procedimiento se obtiene un sistema con, sucesivamente, (N–2), (N–3), ... ecuaciones con (N – 2), (N – 3), ... incógnitas, hasta que se llega a una última ecuación con una única incógnita (que resultará en general muy compleja si previamente no se realizan simplificaciones numéricas). Se obtiene el valor de esta incógnita y se la reemplaza en el **par** de ecuaciones con **dos** incógnitas obtenidas en el paso anterior, calculando así el valor de la otra incógnita. Pasos sucesivos permiten obtener los valores de las incógnitas restantes hasta completar el cálculo. Por supuesto, el sistema tiene una única solución o no tiene solución o tiene infinitas soluciones. Para que no haya solución basta que cualquier par de ecuaciones del sistema no la tenga.

Si quiere practicar, use el método de sustitución para el sistema (modesto) de tres ecuaciones con tres incógnitas.

$$5x - 2y + 3z = 21$$

$$2x + y - 2z = -3$$

$$x - y + z = 6$$

Respuesta: $(x = 2;\ y = -1;\ z = 3)$

1.5 ECUACION CUADRATICA

Hasta aquí hemos visto ecuaciones (o sistemas de ecuaciones) en que las incógnitas aparecían elevadas a la primera potencia o a la potencia cero)

$$x^1 = x \quad ; \quad y^1 = y$$

llamadas ecuaciones **lineales**. ¿Qué pasa si tenemos ecuaciones con incógnitas elevadas a cualquier potencia? Por ejemplo:

$$x^2 = xx;\ y^3 = yyy;\ x^{1/2} = \sqrt{x};\ y^{2/3} = \sqrt[3]{y^2};\ \text{etc}$$

La primera respuesta es que la cosa se complica mucho. Por esa razón vamos a estudiar, ya que es de uso común la llamada **ecuación cuadrática** o **ecuación parabólica** en que únicamente una de las "variables" está elevada al cuadrado; la forma general que trataremos es:

$$y = a\,x^2 + b\,x + c$$

Esta es una ecuación con dos incógnitas, y entonces, al igual que en el caso anterior, no tiene solución única sino un conjunto infinito de soluciones. Para ecuaciones **lineales**, la gráfica cartesiana representa este conjunto como una **recta**. Si la ecuación **no** es lineal, la gráfica resultará generalmente una **curva**. La curva que representa a la ecuación cuadrática en un diagrama cartesiano se denomina **parábola**, de donde el nombre de ecuación parabólica.

Para observar la forma de una parábola en la representación cartesiana, haremos una **tabla de valores** que consiste en encolumnar pares (x, y) que satisfacen la ecuación cuadrática y llevarlos a los ejes cartesianos.

Para ello asignaremos valores a **x** y con la ecuación calcularemos los correspondientes valores de **y**.

Supongamos la ecuación:

$$y = 2x^2 - 4x - 3$$

A continuación damos la tabla de valores (¡compruébelos!) y la gráfica de la curva:

x	y
-2	13
-1	3
0	-3
1	-5
2	-3
3	3
4	13
.	.
.	.

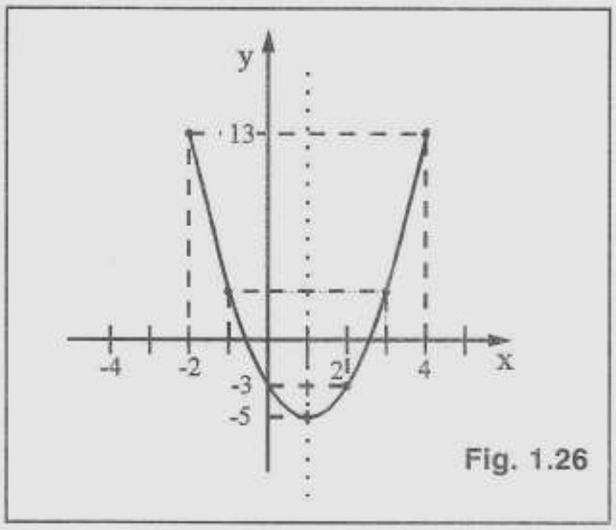


Fig. 1.26

Observe que la parábola tiene un **vértice** (x = 1; y = -5) por el cual podemos trazar un **eje vertical de simetría** (dibujado en línea de rayas en la figura): la parábola se ramifica en forma simétrica a ambos lados de este eje. Observe además que la parábola corta al eje de ordenadas en (x = 0; y = -3). De la ecuación general:

$$y = a\,x^2 + b\,x + c$$

la **ordenada al origen** resulta de hacer x = 0 => y = c y éste es justamente el valor de cruce de la parábola con eje y.

Es más dificil conocer el cruce de la parábola con el eje x, que en realidad pueden ser:

- Dos puntos de cruce (como en la figura).
- Un punto de cruce (cuando el vértice se produce exactamente sobre el eje x.
- Ningún punto de cruce (cuando el vértice y todo el resto de la parábola están por encima o por debajo del eje x). Estas situaciones se ilustran en la **Fig. 1.27**. Note que la parábola puede apuntar hacia abajo o hacia arriba, y el vértice estar en cualquier posición del gráfico x, y. Volveremos sobre esto.

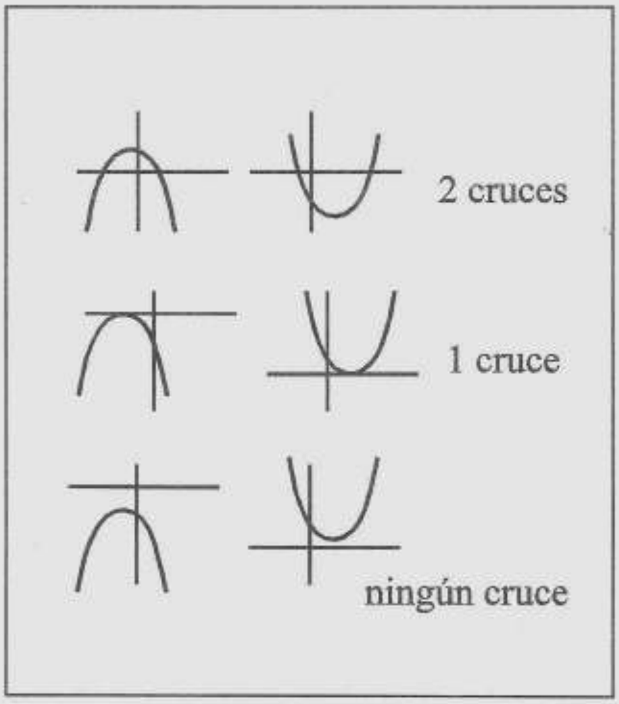


Fig. 1.27

El cruce con el eje x implica hallar la solución de la ecuación cuadrática bajo la condición y = 0, o sea

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

La solución de esta ecuación cuadrática puede obtenerse mediante una *triquiñuela* matemática, que suele denominarse

"completar cuadrados", sabemos que:

$$(a + b)^2 = (a + b)\,(a + b) = a^2 + 2\,a\,b + b^2$$

Entonces:

$$a^2 + 2\,a\,b = (a+b)^2 - b^2$$

y si tenemos una expresión como "$a^2 + m\,a$" donde m es una constante cualquiera, podemos suponer $m = 2\,b$ y escribir:

$$a^2 + m\,a = a^2 + 2\,a\,b =$$

$$= (a+b)^2 - b^2 = (a + m/2)^2 - m^2/4$$

Esta es la *"triquiñuela"* que usaremos para resolver la ecuación cuadrática:

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

Primero dividimos toda la ecuación por a. Como 0/a = 0 cualquiera sea a (distinto de cero, por supuesto) tenemos:

$$x^2 + b/a\;x + c/a = 0 \Rightarrow x^2 + b/a\;x = -c/a$$

Completamos cuadrados en el primer miembro:

$$x^2 + b/a\;x = (x + b/2a)^2 - b^2/4a^2$$

y, entonces,

$$(x + b/2a)^2 - b^2/4a^2 = -c/a \Rightarrow$$

$$(a + b/2a)^2 = b^2/4a^2 - c/a = (b^2 - 4ac)/4a^2$$

y, observando que la raíz cuadrada del segundo miembro puede ser positiva o negativa, ya que $(+b)^2 = (-b)^2$, obtenemos:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{(b^2-4ac)}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

¿Qué representa el doble signo?.

Que tenemos dos soluciones posibles:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

lo que es otra forma de decir que la parábola corta al eje x en **dos** puntos. Pero hemos dicho que no siempre ocurre esto.

Por ejemplo si

$$b^2 = 4\,a\,c$$

el radicando se anula y tenemos que $x_1 = x_2 = -b/2a$. Los dos puntos de cruce se confunden en uno, que es el vértice de la parábola.

Y de paso observamos que, sin quererlo, hemos hallado la **abscisa del vértice de la parábola:**

$$x_v = -b/2a$$

y de la ecuación cuadrática hallamos la ordenada de ese vértice.

$$y_v = a\,x_v^2 + b\,x_v + c =$$

$$= a(-b/2a)^2 + b(-b/2a) + c =$$

$$= b^2/4a = b^2/2a + c =$$

$$= -b^2/4a + c =$$

$$= -1/4a\,(b^2 - 4ac)$$

tal que, resultó:

$$y_v = -1/4a\,(b^2 - 4ac)$$

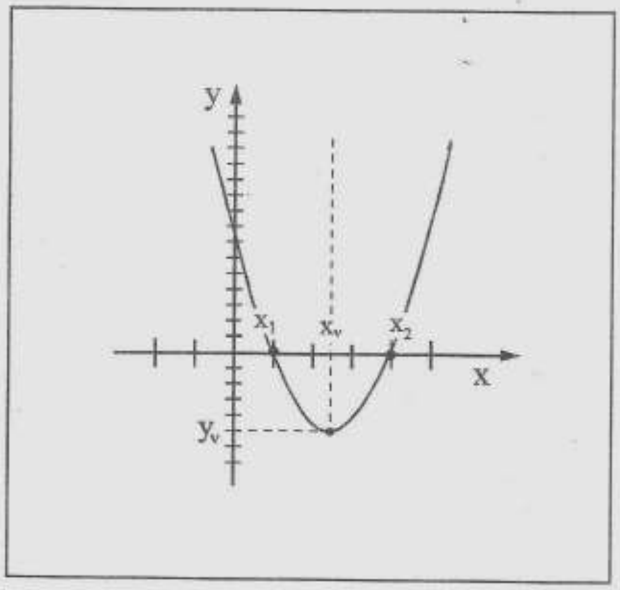


Fig. 1.28

¡Observe que el paréntesis es justamente el radicando del que veníamos hablando! Si la parábola tiene su vértice sobre el eje x, entonces lógicamente $y_v = 0$.

Hay un tercer caso, en que el radicando

$$b^2 - 4ac$$

es negativo. En tal caso la raíz no tiene solución real (su solución es un número complejo) y no hay cruce de parábola con el eje x. Sin embargo puede verse que la expresiones ya mensio-nadas para x_v, y_v valen también en ese caso. Al radicando se lo suele denominar **discriminante** [Δ] de la ecuación cuadrática.

Calculemos los puntos de cruce de la parábola del ejemplo con el eje x.

Aquí, a = 2, b = -4, c = -3. Entonces:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{40}}{4}$$

$$x_1 = \frac{4 + \sqrt{40}}{4} \cong 2{,}581$$

$$x_2 = \frac{4 - \sqrt{40}}{4} \cong -0{,}581$$

que coinciden con los valores que podíamos obtener (idealmente) de la gráfica.

Calculemos las coordenadas del vértice:

$$x_v = -b/2a = -(-4)/(2 \cdot 2) = 1$$

$$x_v = 1$$

$$y_v = -1/4a\ (b^2 - 4ac) =$$

$$= -1/4 \cdot 2\ [16 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)] = -40/8$$

$$y_v = -5$$

que también coinciden con los valores obtenidos del gráfico.

Otras relaciones que podemos obtener ligan la posición del vértice con los puntos de cruce con el eje de abscisas.

Sean

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} ; x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Entonces (¡compruébelo!):

$$x_2 + x_1 = 2\,x_v$$

además,

$$x_1 \cdot x_2 = c/a$$

$$x_2 - x_1 = -\sqrt{\frac{\Delta}{a}}$$

Para completar este análisis de la ecuación cuadrática debemos mencionar un criterio para decidir sin graficar si la parábola apunta hacia arriba o hacia abajo, o dicho en términos más técnicos, si la **concavidad** se halla hacia abajo o hacia arriba (relea esto mirando la gráfica del ejemplo, por favor).

Lamentablemente no hemos hallado una forma simple de establecer este resultado, por damos sin demostración:

a > 0 => concavidad hacia arriba

a < 0 => concavidad hacia abajo

Fig. 1.29

Y resumimos ahora las propiedades de la parábola, siendo:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Coordenadas del vértice:

$$x_v = -b/2a \ ; \ y_v = -\Delta/4a$$

- Intersección con el eje y: x = 0: y = c (ordenada al origen)
- Intersección con el eje x:

$$x_{1,2} = 1/2a\ (-b \pm \sqrt{\Delta}) : y = 0$$

. dos cruces si $\Delta > 0$

. un cruce (vértice) si $\Delta = 0$

. ningún cruce si $\Delta < 0$

1.6 NOTACION CIENTIFICA

En física a menudo nos encontraremos con números muy grandes o pequeños, lo que complica el usarlos en cálculos. Por ejemplo, la masa de la tierra, expresada en kilogramos, es:

$$m_T \approx 5980000000000000000000000 \text{ kg}$$

y la masa de la partícula llamada electrón, que forma parte de los átomos es:

$$m_e \approx 0{,}0000000000000000000000000000091 \text{ kg}$$

o sea que m_T está dada por 590 seguido de 22 ceros y m_e por 91 precedido por 30 ceros después del punto decimal.

Es entonces lógico tratar de expresar estas cantidades de una forma tan compacta como sea posible, y esa forma es la ***notación científica*** o ***notación exponencial***.

Para escribir un número **mayor que 1** en esta notación vamos corriendo sucesivamente el punto decimal (coma decimal) *hacia la izquierda*. Cada desplazamiento de una posición equivale a **dividir** el número por diez:

$$377/10 = 37{,}7; \quad 377/100 = 3{,}77;$$

$$377/1000 = 0{,}377$$

de modo que para mantener el mismo número debemos multiplicar por diez en cada desplazamineto:

$$377 = 37{,}7 \cdot 10; \quad 377 = 3{,}77 \cdot 100;$$

$$377 = 0{,}377 \cdot 1000$$

o lo que es lo mismo:

$$377 = 37{,}7 \cdot 10; \quad 377 = 3{,}77 \cdot 10^2;$$

$$377 = 0{,}377 \cdot 10^3$$

y así sucesivamente. En el caso de m_T tenemos:

$$m_T \approx \underbrace{5980000000000000000000000}_{22 \text{ ceros}} \text{ kg}$$

$$m_T = 598 \cdot 10^{22} = 5{,}98 \ 10^{24}$$

resultó finalmente $m_T = 5{,}98 \ 10^{24}$, que es la notacíon científica buscada.

Para números **menores que 1** corremos el punto decimal *hacia la derecha*. Cada desplazamiento de una posición equivale ahora a **multiplicar** el número por diez:

$$0{,}00377 \cdot 10 = 0{,}0377;$$

$$0{,}00377 \cdot 1000 = 3{,}77$$

de modo que para mantener el mismo número ahora debemos dividir por diez en cada desplazamiento, con la notación:

$$1/10 = 10^{-1}; \ldots \ 1/1000 = 10^{-3}; \text{ etc.}$$

Luego:

$$0{,}00377 = 0{,}0377 \ 10^{-1} = 0{,}377 \ 10^{-2} = 3{,}77 \ 10^{-3}$$

En el caso de m_e tenemos:

$$m_e \approx \underbrace{0{,}0000000000000000000000000000091}_{30 \text{ ceros}} \text{ kg}$$

$$m_e = 0{,}91 \ 10^{-30} \text{ kg}$$

$$m_e = 9{,}1 \ 10^{-31} \text{ kg}$$

Las calculadoras con notación científica tienen una tecla "E", "Exp" parà ingresar números en esta notación. Verifique la suya para ver cómo aparecen los números en pantalla.

Recuerde que:

$$10^4 = 10000$$
$$10^3 = 1000$$
$$10^2 = 100$$
$$10^1 = 10$$
$$10^0 = 1$$
$$10^{-1} = 0{,}1$$
$$10^{-2} = 0{,}01$$
$$10^{-3} = 0{,}001$$
$$10^{-4} = 0{,}0001$$

¿Cómo operar con números con esta notación?

Para ello es necesario recordar que:

$$a^x \cdot a^y = a^{(x+y)}$$

(se suman las potencias en el producto)

$$a^x/a^y = a^x \cdot a^{-y} = a^{(x-y)}$$

(se restan las potencias en la división)

$$1/a^x = a^{-x} \ ; \ 1/a^{-x} = a^x$$

(se pasa de numerador a denominador y viceversa cambiando el singo de la potencia)

Por ejemplo:

$$a^5 \cdot a^3 = a^{(5+3)} = a^8$$

$$a^5/a^3 = a^{(5-3)} = a^2$$

$$1/a^{(3-5)} = 1/a^{-2}$$

$$a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 = a^{(3+3+3)} = a^9$$

$$a^3/a^3 = a^{(3-3)} = a^0 = 1$$

todo número elevado a la cero da 1 (menos el cero)

$$a^3/a^2 = a^{(3-2)} = a^1 = a$$

todo número elevado a la 1 da el mismo número

$$a^2/a^3 = a^{(2-3)} = a^{-1} = 1/a$$

todo número elevado a la (-1) da la inversa del número.

Si se marea con estas sumas y restas de exponentes, intente expresar las operaciones escribiendo las potencias como productos repetidos, como:

$$a^5 = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{5 \text{ veces}} \qquad a^3 = \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{3 \text{ veces}}$$

Entonces:

$$a^5 \cdot a^3 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^8$$

$$a^5/a^3 = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = a \cdot a = a^2$$

$$a^3 \times a^3 \times a^3 = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{9 \text{ veces}} = a^9$$

Como este procedimiento es eficaz hasta cierto punto,por ejemplo, considere la operación

$$a^{98} \cdot a^{65} / a^{44} = a^{119},$$

trate de volver al esquema anterior una vez que comprendió la operatoria.

Aclaremos estas reglas con otro ejemplo:

Calcular la fuerza de atracción gravitatoria entre la Tierra y el Sol, usando la Ley de la gravitación de Newton :

$$F = G \frac{M_T \, M_S}{d^2}$$

donde:

$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N m²/kg² (cte.de gravitación universal)

$M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg (masa de la Tierra)

$M_S = 2 \times 10^{30}$ kg (masa del Sol)

$d = 1{,}5 \times 10^{11}$ m (distancia Tierra - Sol)

No nos preocupemos por el momento por las unidades de estas magnitudes. Están todas en el llamado Sistema Internacional y son compatibles entre sí. Vamos al álgebra de la operación:

$$F = \frac{6{,}67 \; 10^{-11} \; 5{,}98 \; 10^{24} \; 2 \; 10^{30}}{(1{,}5 \; 10^{11})^2}$$

Observe que:

$$(1{,}5 \cdot 10^{11})^2 = (1{,}5 \cdot 10^{11}) \cdot (1{,}5 \cdot 10^{11}) =$$

$$= 1{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{11} \cdot 10^{11} =$$

$$(1{,}5)^2 \cdot 10^{11+11} = 2{,}25 \cdot 10^{22}$$

Luego

$$F=\frac{6,67\cdot 5,98\cdot 2}{2,25}\,\frac{10^{-11}\cdot 10^{24}\cdot 10^{30}}{10^{22}}=$$

$$=\frac{6,67\cdot 5,98\cdot 2}{2,25}10^{-11+24+30-22}=$$

$$=\frac{6,67\cdot 5,98\cdot 2}{2,25}10^{21}=35,5\;10^{21}$$

Ejercítese calculando la fuerza que la Tierra ejerce sobre un hombre de 70 kg parado sobre el Ecuador, aquí:

$$F=G\frac{M_T M_h}{R_{T^2}}$$

G y M_T tienen los mismos valores que en el ejemplo,

$m_h = 70$ kg (masa del hombre)

$R_T = 6,37\text{x}10^6$ (radio de la Tierra en metros)

La respuesta es F ≈ 688 N = 6,88 x 10^2 N

(En las unidades del Sistema Internacional:

688 N ≈ 65 kgf).

1.7 EJERCICIOS DE APLICACION

SERIE 1.1 A

Verifique los siguientes resultados:

1.1.a

$$\frac{3\cdot(5-2,2)+\dfrac{12}{(4-3,5)\cdot 12,5}-9}{42-\dfrac{8}{3}\cdot(7-1)+12\cdot\left(9-\dfrac{4}{5}\right)-7,52}=0,0113$$

1.1.b

$$\frac{1650/\left[24/(3-4)\cdot 12-7\cdot 6\right]+4,4}{1-12\cdot(6-5/2)/(9-3)+7-2\cdot 3,5}=0,1$$

1.1.c

$$\frac{3,5\cdot\left(12-\dfrac{9}{3}-5\right)-5,6\cdot 2,5}{4,7+(8-1,8)\cdot\dfrac{(6+4,3)}{9}}=0$$

SERIE 1.1 B

Hallar x en las siguientes ecuaciones:

1.1.d

$3\,x - 10\,x = 8\,x - 30$ $\quad x = 2$

1.1.e

$-2\,x + 3 = -30 + 4\,x + 27$ $\quad x = 0$

1.1.f

$4\,x + 0,6\,(x - 1) = 10\,(0,4\,x - 1 + x)$ $\quad x = 1$

1.1.g

$x/2 + x/3 - 2 = 13$ $\quad x = 18$

1.1.h

$(2\,x + 1)/4 + x/2 = 9/4$ $\quad x = 2$

1.1.i

$(10 - 5\,x)/2 - (8 - 2\,x)/2 - 11/2 = 0$ $\quad x = -3$

SERIE 1.2

Se desea representar en un gráfico cartesiano las rectas cuyas ecuaciones se dan:

1.2.a

$-2\,x + 3\,y_1 = 6$ $\quad (m = 2/3;\ b = 2)$

1.2.b

$x/3 - y_2/5 = 1$ $\quad (m = 5/3;\ b = -5)$

1.2.c

$0,3\,x - y_3 + 1,3 = 0$ $\quad (m = 0,3;\ b = 1,3)$

1.2.d

$y_4 + x + 1 = 0$ $\quad (m = -1;\ b = -1)$

1.2.e

$y_5 + 4x - 5 = 0$ $\quad (m = -4;\ b = 5)$

SERIE 1.4

Verifique estos resultados y grafique las rectas en un plano cartesiano

1.4.a

$$x + y = 4$$
$$-x + y = 6$$
$(x = -1,\ y = 5)$

1.4.b

$$2x - y = -1$$
$$x - 2y = 1$$
$(x = -1;\ y = -1)$

1.4.c

$$3x - 2y = 1$$
$$6x - 4y = 0$$
(inexistente)

1.4.d

$$x + 2y = 2{,}2$$
$$3x - 2y = 5{,}8$$
$(x = 2;\ y = 0{,}1)$

1.4.e

$$4y - 3x + 1 = 0$$
$$3 + 2x + y = 0$$
$(x = -1;\ y = -1)$

SERIE 1.5

Halle en las siguientes parábolas: las coordenadas del vértice, los puntos de intersección con los ejes e indique hacia donde apuntan.

1.5.a

$$y = 3x^2 + 2x + 3$$

1.5.b

$$y = -2x^2 + x - 1$$

1.5.c

$$y = 1/2\ x^2 - 2$$

1.5.d

$$y = -2x^2 + 3x - 5$$

1.5.e

$$y = x^2 - 2x + 2$$

1.8 PROBLEMAS DE APLICACION

SERIE 1.1

1 - Resolver:

a) $2x + 4 = 0$

b) $3 : (x - 2) = 1/2$

c) $-2x + 1 = -x + 2$

d) $5 + 3(x - 2) = (x + 21) : 3 + 8$

e) $2 + 3(x - 1) = (x + 23) : 2$

2 - Dado $v = (2v_1v_2)/(v_1 + v_2)$ obtener la expresión de v_2.

3 - Dado $mgh_o = (1/2)mv^2 + mgh$ y $r = v/\omega$, obtener la expresión de ω en función de g y h.

4 - Dado

$$y = y_o + \operatorname{tg}\alpha\ x + (1/2)\ g\ x^2/(v_o^2 \cos^2\alpha)$$

a) Hallar y, sabiendo que

$$y_o = 5;\ \alpha = 0°;\ g = -10;\ x = 16;\ v_o = 40$$

b) Hallar v_o, sabiendo que

$$g = -10;\ \alpha = 30°;\ x = 100;\ y_o = 10;$$
$$y = 70.$$

5 - Por medio de una calculadora se obtuvieron los siguientes resultados:

a) sen 60° = 0,866025404
b) sen 37° = 0,601815023
c) sen 53° = 0,79863551

Redondear los valores con 5; 4; 3; 2 y 1 cifra decimal.

6 - Al resolver una serie de problemas, se obtuvieron, usando calculadora, los siguientes resultados

$x_1 = 24,73863375$
$x_2 = 3,208366141$
$x_3 = 0,324822783$

Redondear al segundo decimal.

7 - Utilizando las tablas de unidades, verificar las siguientes ecuaciones.

a) $a_c = v^2/r$
b) $v = \sqrt{(2E_c/m)}$
c) $E_c = p^2/2m$
d) $v = \omega/f$
e) $y = y_o + x\ tg\alpha + (1/2)\ g\ x^2/(v_o^2 \cos^2\alpha)$
f) $F\ t = m\ v$

8 - A partir de la ley de gravitación universal: $F = -G\ (m_1 m_2)/r^2$ obtener las unidades de la constante G.

SERIE 1.2

1 - Representar en los ejes cartesianos los siguientes puntos:

A: (6; 2) B: (-2; 3/2) C: (1; 0) D: (0; -1)

Hallar la distancia entre A y D; C y D

2 - Graficar las rectas dadas por las siguientes ecuaciones.

L_1: $y = -2x + 3$ L_4: $y = 1$
L_2: $y = 2x - 3$ L_5: $x = 3$
L_3: $y = -2$ L_6: $x = -1$

3 - Hallar la ecuación de la recta tal que:

a) Pase por A: (0; 5) y B: (-2; 1)

b) Tenga pendiente m = -3 y pase por (2; 0)

c) Tenga ordenada al origen b = 2,5 y pase por (-0,5; 2)

4 - Obtener la ecuación de cada una de las rectas que pasan por los siguientes pares de puntos

a) P_1: (2; 1) y P_2: (-3; -1)

b) P_1: (1; 4) y P_2: (-2; 4)

c) P_1: (-2; 6) y P_2: (-2; -1)

d) P_1: (6; 0) y P_2: (0; 3)

5 - Obtener las ecuaciones de las rectas que pasan por A y cumplen con las condiciones indicadas

a) A: (1; 4) y tiene abscisa al origen q = 8

b) A: (5; 2) y tiene ordenada al origen b = 7

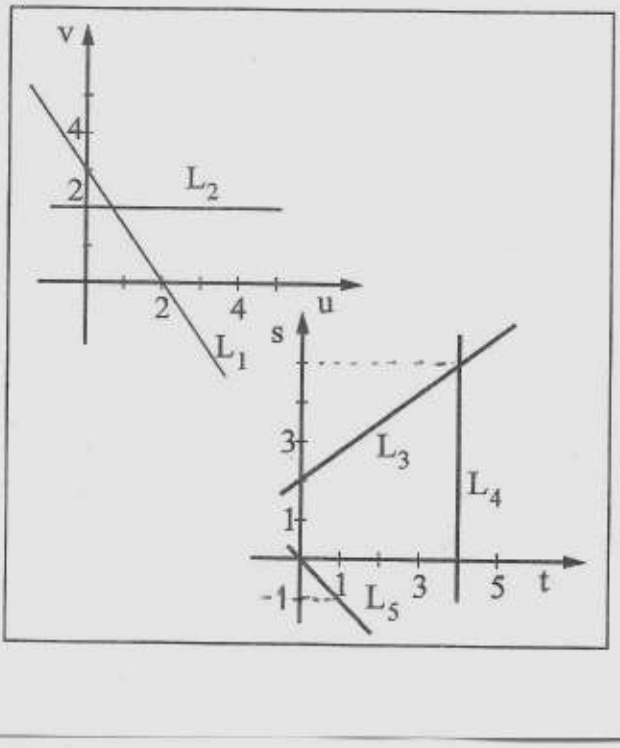
6 - Determinar la ecuación de la recta paralela a

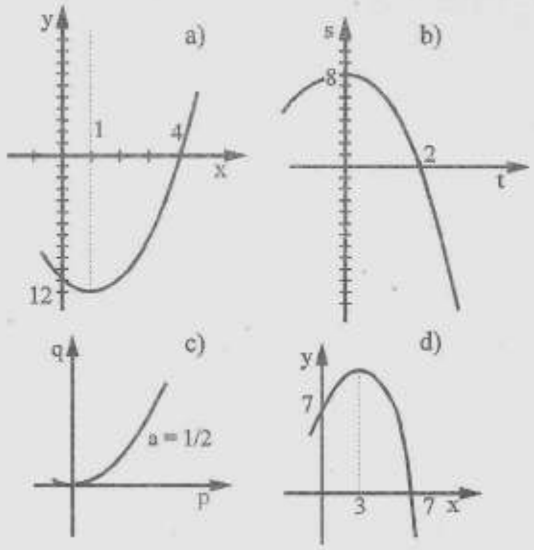
a) y =2x +3 que pasa por B: (5; 1)

b) y = -x +4 que pasa por C: (0; -2)

c) y = -2x + 3 que pasa por el origen

7 - Hallar las ecuaciones de las rectas graficadas





SERIE 1.5

1 - Representar en un mismo gráfico las siguientes funciones cuadráticas. Compararlas y deducir la influencia del coeficiente del término cuadrático.

a) $y = 2x^2$ b) $y = 4x^2$ c) $y = 1/3x^2$

d) $y = -2x^2$ e) $y = -1/4x^2$ f) $y = -1/2x^2$

2 - Representar las siguientes funciones cuadráticas. Compararlas y deducir la influencia del término independiente.

a) $y = 3x^2 - 3$ c) $y = 1/2x^2 + 2$

b) $y = -1/4x^2 - 1$ d) $y = -3/2x^2 - 1/2$

3 - Representar las siguientes funciones cuadráticas. Compararlas y deducir la influencia del coeficiente del término lineal.

a) $y = -x^2 + 4x$ c) $y = 2x^2$

b) $y = x^2 - 3x + 1$ d) $y = -1/3\,x^2 - 1/6\,x - 3$

4 - Hallar las ecuaciones de las siguientes parábolas graficadas en el semiplano de abscisa positiva; siendo a el coeficiente del término cuadrático.

5 - Dada la ecuación de la parábola

$$P: y = t^2 - 4t - 5$$

a) Graficarla.

b) Hallar el punto de intersección con el eje x.

c) Hallar, si los tiene, los puntos de intersección con el eje t

d) Hallar las coordenadas del vértice.

6 - Idem ejercicio **5** para:

$$P: y = 4 + t - 1/2\,t^2$$

7 - Hallar, si los tiene, los puntos de intersección de las parábolas dadas en **5** y **6** con la recta.

$$L: y = -3t$$

8 - Hallar los valores de t para los que se cumplen las siguientes ecuaciones.

a) $t\,(t + 3) - (3t + 4) = 0$

b) $t\,(t + 3) = 5t$

c) $\dfrac{t+1}{t-1} = \dfrac{-1}{t+1}$ con $t \neq \pm 1$

d) $(t - 1)^2 = (t + 3)\,(t - 1) - 4t^2$

e) $\dfrac{2+t}{t} - (8/t + 1) = 0$ con $t \neq 0$

9 - Dada la ecuación

$$y = y_o + \mathrm{tg}\alpha\, x + 1/2\ g\ x^2/(v_o^2\cos^2\alpha),$$

hallar los valores de x que cumplen con la misma.

Datos:

$g = -10$; $\alpha = 30°$; $v_o = 100$; $y_o = 15$; $y = 8$

10 - Dada la ecuación de la circunferencia

$$C: x^2 + y^2 = 25$$

a) Graficar.

b) Hallar su perímetro y su superficie.

c) Hallar la longitud de un arco que abarca 30°; π/4 radianes; 1/3 de giro.

d) Hallar las coordenadas de los puntos de intersección con la

$$L: y = x + 5$$

SERIE 1.6

1 - Resolver sin usar calculadora

a) $5{,}3\ 10^{-4} + 1{,}6\ 10^{-5} =$

b) $4{,}8\ 10^{14} - 5{,}6\ 10^{13} + 8{,}1\ 10^{12} =$

c) $2{,}4\ 10^{3}.\ 7{,}5\ 10^{-5} =$

d) $25/6\ 10^{-5}.\ 8{,}4\ 10^{-12}.\ 12/7\ 10^{4} =$

e) $(12/5\ 10^{12}) / (24/25\ 10^{-4}) =$

f) $10^{-2} / 5\ 10^{-11} =$

g) $(3\ 10^{3})^2 =$

h) $(5\ 10^{-4})^3 =$

i) $\sqrt[3]{0{,}8\,10^{7}} =$

j) $\sqrt[3]{2{,}7\,10^{-2}} =$

k) $\dfrac{3\,10^{-5}\sqrt{6{,}4\,10^{13}}}{3{,}2\,10^{-4}} =$

l) $\dfrac{\sqrt{3\,10^{-6}\ 5\,10^{13} - 1{,}5\,10^{-2}\ 4\,10^{9}}}{(0{,}1)^{-1/2}} =$

2 - Resolver expresando previamente los factores en notación científica (sin usar calculadora):

a)

$$\frac{16000 \cdot 0{,}0002 \cdot 1{,}2}{2000 \cdot 0{,}006 \cdot 0{,}00032} =$$

b)

$$\frac{6000000 \cdot (0{,}00004)^4}{(800)^2 \cdot (0{,}0002)^3} =$$

3 - Sabiendo que la aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta se calcula mediante la expresión $g_p = G\ M_p\ /\ R_p^{\,2}$, M_p: masa del planeta; R_p: radio del planeta,

a) Hallar la gravedad en la superficie de la Tierra.

b) Si la gravedad en la superficie lunar vale 1,69 (en unidades del Sistema Internacional), y su radio es de $1{,}7\ 10^{6}$, hallar la masa de la Luna.

4 - Hallar, usando el resultado del problema anterior, la fuerza de atracción que existe entre la Tierra y la Luna. ($d_{TL} = 3{,}84\ 10^{8}$).

4.1 UNIDADES Y MAGNITUDES FISICAS

En Física no basta operar correctamente con reglas algebraicas para obtener un resultado significativo. Es además necesario especificar en qué unidades se expresa tal resultado. Por ejemplo, si decimos que un tren pasa frente a nosotros con una velocidad de 20 m/s y alguien a nuestro lado replica que la velocidad es de 72 km/h, no está contradiciendo nuestra afirmación, a pesar de dar un número distinto, porque las dos formas de expresión son equivalentes, es decir, son una y la misma cosa y la diferencia numérica resulta de usar diferentes unidades de la velocidad: m/s o km/h. Si decimos «20» ó «72» estas expresiones carecen de significado mientras no aclaremos a qué unidades estos números están referidos.

En la Física se definen numerosas unidades que hacen más fácil el trabajo matemático pero la proliferación de unidades acarrea dificultades de comprensión entre personas que utilicen definiciones distintas. Así, podemos medir longitudes terrestres en metros o en yardas, en kilómetros o millas, en múltiplos de la longitud perimetral de la Plaza de Mayo o cualquier otra longitud que se nos ocurra conveniente, pero los números obtenidos en cada caso para expresar una distancia dada serán distintos y será necesario tener una tabla de conversión, lo que hace tedioso y sujeto a error el comparar resultados de experiencias obtenidas por distintas personas. Por lo tanto se ha convenido en fijar un Sistema Internacional de unidades físicas (que abreviaremos en adelante SI) para evitar la proliferación de unidades para una misma magnitud física.

De este sistema señalaremos a continuación las unidades de las magnitudes físicas relevantes en este curso, dejando de lado aquellas magnitudes de interés en otros casos y tratando de simplificar al máximo las definiciones de las unidades, que se han complicado a medida que los avances científicos y técnicos han necesitado mayor precisión en las mediciones.

Por una parte, decimos que hemos definido una unidad de alguna magnitud física cuando especificamos un conjunto de reglas o, por así decirlo, una «receta» de procedimientos a seguir para medir la magnitud y asignarle un número. Estas recetas pueden ser tan arbitrarias como el ejemplo de atribuir la unidad de longitud al perímetro de la Plaza de Mayo, medido extendiendo a su largo un piolín, pero en la actualidad los procedimientos tienden a utilizar fenómenos físicos que puedan repetirse en iguales condiciones en cualquier sitio y arrojen idénticos resultados.

Por otra parte, las magnitudes físicas son interdependientes, es decir, definido un conjunto de unidades, las restantes surgen a partir de ellas mediante las relaciones teóricas que la física ha establecido entre las magnitudes correspondientes. Así, si hemos definido unidades para las magnitudes longitud y tiempo, la unidad de la magnitud velocidad se deriva de aquellas por la relación que define a la velocidad como el cociente entre desplazamiento de un móvil (que es una longitud) y el tiempo transcurrido.

Entonces tendremos unidades **fundamentales**, que son las que definimos mediante reglas de medición y procedimientos de obtención, y unidades **derivadas** que se obtienen a partir de las fundamentales a través de las relaciones físicas entre las magnitudes correspondientes.

Qué unidades tomar como fundamentales y cuáles como derivadas es en última instancia una decisión convencional, pero lo importante es tratar de elegir un número de unidades fundamentales tan pequeño como sea posible y cuyas recetas definitorias sean universales y suficientemente documentadas para evitar ambigüedades.

En el Sistema Internacional (SI) se han elegido como unidades fundamentales correspondientes a las magnitudes de longitud, tiempo y masa, que serán de interés a lo largo del curso, y a otras magnitudes relevantes en otros campos de la física que no utilizaremos aquí.

Las unidades asignadas a estas magnitudes, con los símbolos y las definiciones aceptadas internacionalmente se dan en la siguiente tabla, donde también se da la fecha en que se aceptó la definición citada:

Magnitud	Unidad	Símbolo	Definición
longitud	metro	m	"...una longitud igual a 1650763,73 longitudes de onda en el vacío de la radiación correspondiente a la transición entre los niveles 2p10 y 5d5 del átomo de Kriptón 86." (1960). En 1983 "el metro se define como la longitud del camino viajando en el vacío en el intervalo de tiempo de 1/299 792 458 segundos, el denomindor es la velocidad de la luz en el vacío".
tiempo	segundo	s	"...la duración de 9192631770 períodos de la radiación que corresponde a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado básico del átomo de Cesio 133." (1967)
masa	kilogramo	kg	"...este prototipo (cierto cilindro de platino e iridioconservado en Sèvres, Francia) se considerará de ahora en más como la unidad de masa." (1889)

A partir de estas unidades fundamentales se pueden definir las unidades derivadas para las otras magnitudes utilizadas en la parte de la Física denominada mecánica. Las que utilizaremos en este curso se presentan en la siguiente tabla. Algunas de ellas tienen nombres especiales.

Magnitud	Unidad	Símbolo	Expresión en términos de las unidades fundamentales	Expresión en términos de otras unidades
Velocidad	$\frac{\text{metro}}{\text{segundo}}$	---	m/s	---
Aceleración	$\frac{\text{metro}}{(\text{segundo})^2}$	---	m/s^2	---
Fuerza	Newton	N	$kg\ m/s^2$	---
Trabajo y energía	Joule	J	$kg\ m^2/s^2$	N m
Potencia	Watt	W	$kg\ m^2/s^3$	N m/s
Impulso y cantidad de movimiento	$\frac{\text{kilogramo}}{\text{metro segundo}}$	---	kg m/s	N s
Velocidad angular	$\frac{\text{radián}}{\text{segundo}}$	----	1/s	---
Frecuencia	Hertz	Hz	1/s	---

Además de estas unidades, pertenecientes al **SI**, existen en uso otras que provienen de la tradición o de su uso en campos especializados donde se trata con cantidades muy pequeñas o muy grandes que hacen poco práctico el uso de las unidades en el **SI**. Así, por ejemplo, en la Física atómica y nuclear, se trata con longitudes del orden de 10^{-10} a 10^{-14} m, y para evitar el uso de estos factores exponenciales se define:

el Angström (Å) $\qquad 1\ Å = 10^{-10}m$

de modo que la distancia entre átomos vecinos en una muestra de aluminio sólido, digamos, es de 2,86 Å.

En el otro extremo del mundo físico, las distancias entre las galaxias son inmensamente grandes. Por ejemplo, la distancia a la que se encuentra la galaxia más próxima a nuestra posición, Andrómeda, es aproximadamente $2.5\ 10^{19}$ km. La luz viaja en el espacio vacío interestelar a unos 300000 km/s, de modo que la luz proveniente de Andrómeda tarda unos

$8{,}4\ 10^{13}$ s en llegar a nosotros, o sea 2.700.000 años... Aunque esta es una cantidad impresionante, es mucho más manejable que los $2{,}5\ 10^{19}$ km, de modo que las distancias intergalácticas suelen expresarse en «años-luz». Un año-luz es la distancia que recorre la luz en un año, y equivale a $9{,}3312\ 10^{15}$ m.

Sin ir tan lejos de nuestras experiencias cotidianas, hay unidades de uso común que no pertenecen al **SI**. Algunas de las más usuales que utilizaremos en el curso, con su equivalencia con las unidades del **SI** son las siguientes:

Magnitud	**Unidad**	**Expresión en términos de otras unidades**	**Equivalencia con unidades del S.I.**
Velocidad	kilómetro/hora	km/h	1 km/h = (1/3,6) m/s 1 m/s = 3,6 km/h
Fuerza	kilogramo fuerza	kgf	1 kgf = 9,8 N 1 N = (1/9,8) kgf
Trabajo y/o energía	kilográmetro (kilogramo x metro)	kgm	1 kgm = 9,8 J 1 J = (1/9,8) kgm
Energía	kilo x Watt x hora	kWh	1 kWh = $3{,}6\ 10^{7}$ J 1 J = $2{,}778\ 10^{6}$ kWh
Potencia	caballo de potencia	hp	1 hp = 745 W 1 W = 0,001341 hp

Esta tabla le permite trabajar con datos expresados en unidades mezcladas. Ponga especial atención al plantear un problema acerca de qué unidades se utilizan para expresar las magnitudes, y al operar siga las siguientes reglas, que le evitarán errores (muchos estudiantes de nuestros cursos equivocan, por falta de práctica, la conversión de kilómetros por hora a metros por segundo).

- Cada vez que reemplace una magnitud física por su valor numérico, escriba la unidad en que está expresada.
- Antes de operar con los valores numéricos, convierta unidades según la tabla y simplifique los símbolos de tales unidades hasta llegar a la unidad que está calculando. Verifique cuidadosamente que la unidad obtenida corresponde a la magnitud física que expresa.
- Recién en este momento realice los cálculos numéricos.

Como ejemplo, calculemos la aceleración que adquiere un cuerpo de 0,5 kg al actuar sobre él una fuerza de 10 kgf, y la velocidad que tiene al cabo de 2 minutos de acción de la fuerza, si su velocidad inicial era de 36 km/h.

La aceleración adquirida es:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{10\,\text{kgf}}{0{,}5\,\text{kg}}$$

convertimos los «kgf» a «N»: 10 kgf = 98 N (ver la tabla) y expresamos este resultado en las unidades fundamentales **S.I.**

$$98\,\text{N} = 98\,\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}$$

Entonces:

$$a = \frac{98\,\text{kg m}}{0{,}5\,\text{kg s}^2} = 196\,\text{m/s}^2$$

donde hemos simplificado la unidad «kg».

La velocidad que tiene el cuerpo en un instante t dado, suponiendo que la fuerza comienza a actuar en $t = t_o$, cuando la velocidad del cuerpo es v_o, resulta:

$$v(t) = v_o + a\,(t - t_o)$$

En nuestro caso:

$$v_o = 36\ \text{km/h}$$

$$a = 196\ \text{m/s}^2$$

$$t - t_o = 2\ \text{minutos}$$

llevando todos estos valores a unidades SI

$$v_0 = \frac{36\,\text{m}}{3{,}6\,\text{s}} = 10\,\text{m/s}$$

$$t - t_o = 2\ 60\ \text{s} = 120\ \text{s}$$

y entonces:

$$v_{(t\,=\,to+\ 120\,s)} = 10\ \text{m/s} + 196\ \text{m/s}^2\ 120\ \text{s}$$

$$v_{(t\,=\,to+\ 120\,s)} = 23530\ \text{m/s}$$

Constantes universales:

velocidad de la luz en el vacío:

$$c \cong 3\ 10^8\,\text{m/s}$$

constante de gravitación universal:

$$G \cong 6{,}67\ 10^{-11}\,\text{N m}^2/\text{kg}^2$$

Apéndice I
Vectores

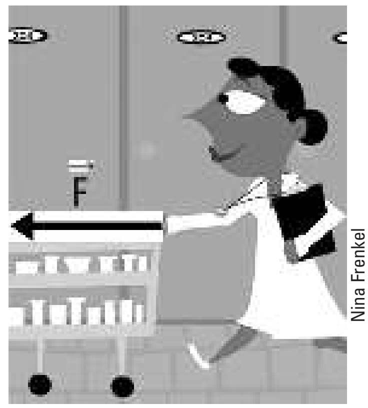
Vectores

Los vectores son segmentos orientados. Sus elementos son:
- Punto de aplicación.
- Intensidad o módulo (siempre un número positivo)
- Dirección (orientación en el espacio de la recta que lo contiene)
- Sentido (uno de los dos posibles sobre la recta, indicado por una punta de flecha)

Se representan gráficamente mediante una flecha cuya dirección y sentido son los del vector y cuya longitud, en una escala adecuada, es proporcional al módulo o intensidad del vector.

Indicaremos que una magnitud es vectorial colocando sobre su notación una pequeña flecha arriba ($\vec{A}$). Para indicar el módulo del vector utilizaremos esa misma notación entre barras ($|\vec{A}|$).

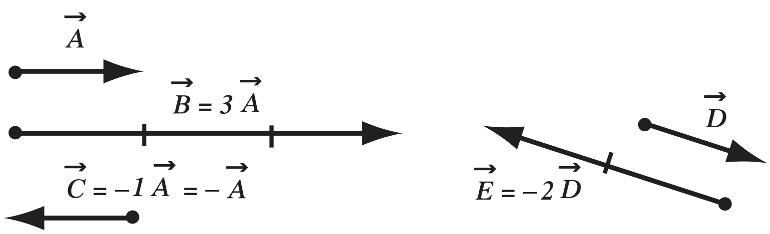
Las operaciones (suma, resta, multiplicación) entre vectores responden a reglas que no son las mismas que entre números.



La médica aplica al carro una fuerza $\vec{F}$ de dirección horizontal, sentido hacia la izquierda y de módulo $|\vec{F}| = 4$ kgf .
Escala: 2 kgf/cm

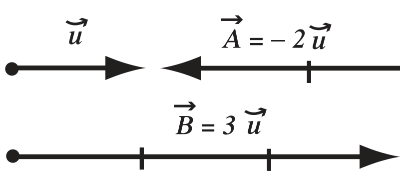
Multiplicación de un vector por un número

Multiplicar un vector por un número es obtener un vector de igual dirección, de módulo igual al valor absoluto del número por la intensidad del vector y cuyo sentido es el mismo u opuesto al del vector dado según que el número sea positivo o negativo.



Observemos que si se multiplica un vector por el número –1 se obtiene el vector opuesto.

Se denomina **versor** a un vector de módulo uno. Si, dada una dirección, tomamos sobre ella un versor según una de las dos orientaciones posibles (versor $\breve{u}$), todo vector sobre esa recta se podrá expresar como un número por el versor.

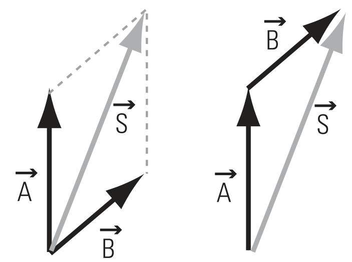


Suma de vectores:

Si compramos un kilo de uva y dos kilos de manzanas, habremos comprado 3 kilos de fruta. Si la clase dura tres horas y se ocupa 1 hora en la explicación teórica, el intervalo es de 15 minutos quedan 1 hora 45 minutos para la parte práctica. De estos ejemplos es claro que para sumar o restar magnitudes escalares (como la masa y el tiempo) basta con sumar o restar los números de las cantidades correspondientes.

Sin embargo no sucede lo mismo con las magnitudes vectoriales. Si al atravesar un río de corriente rápida sujetamos el timón transversalmente a la corriente e imprimimos a la lancha una velocidad de 3 m/s, pero la velocidad de la corriente de agua es 4 m/s, la lancha, vista desde tierra se mueve oblicuamente, ¿cuál es módulo de su velocidad?, ¿en qué dirección exacta se mueve? Es claro que esta información no se obtiene sumando algebraicamente los números. Para responder a estar preguntas debemos aprender a sumar vectores. Existen dos métodos básicos equivalentes: el **método gráfico** que se basa en construcciones geométricas en escala y el **método analítico** que trabaja con las proyecciones de los vectores sobre un par de ejes perpendiculares.

Método gráfico para la suma de vectores



Regla del paralelogramo **Método de la poligonal**

Para sumar dos vectores gráficamente se aplica la llamada **regla del paralelogramo**: el vector suma $\vec{S}$ es la diagonal del paralelogramo cuyos lados son los vectores dados. Otra manera de obtener gráficamente el vector suma, que resulta de mucha utilidad para sumar más de dos vectores, es mediante el **método de la poligonal** que consiste en poner los vectores a sumar uno a continuación de otro: el vector suma es el vector que une el origen del primer vector con el extremo del último.

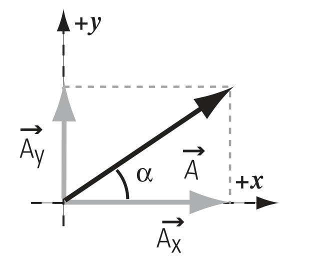
Descomposición de vectores

Para que el tratamiento sea más sencillo, trabajaremos con vectores en el plano.

Un vector se puede expresar siempre como la suma de dos vectores perpendiculares entre sí. En la figura el vector $\vec{A}$ se ha descompuesto según las direcciones de los ejes x e y.

El vector $\vec{A}$ es la suma vectorial de los vectores $\vec{A_x}$ y $\vec{A_y}$.

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$



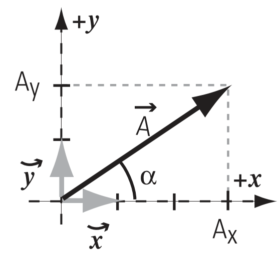
Observamos que el vector $\vec{A}$ es la diagonal del paralelogramo (rectángulo) de lados A_x y A_y.

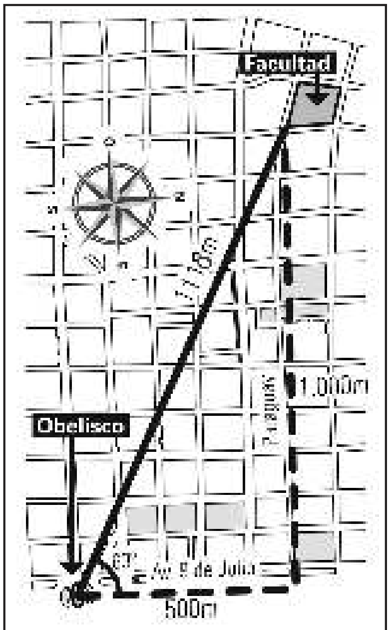
Tomando versores $\breve{x}$ e $\breve{y}$ orientados según los sentidos arbitrariamente elegidos como positivos de los ejes x e y , podemos escribir:

$$\vec{A} = A_x\ \breve{x} + A_y\ \breve{y}$$

Los números A_x y A_y se denominan componentes del vector. Su signo puede ser positivo o negativo según que el sentido de los vectores $\vec{A_x}$ y $\vec{A_y}$ coincida o no con el de los versores correspondientes. En este caso:

$$\vec{A} = 3\ \breve{x} + 2\ \breve{y}$$





Posición de la Facultad de Medicina $\vec{r}$ en un sistema de coordenadas con origen el Obelisco, eje x en dirección sur –norte y eje y en dirección este-oeste.

$$\vec{r} = 500\ m\ \breve{x} + 1000\ m\ \breve{y}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{(500\ m)^2 + (1000\ m)^2} =$$

$$|\vec{r}| = 1118\ m$$

$$\alpha = arctg\frac{1000m}{500m} = 63,4°$$

Las componentes del vector $\vec{A}$ están relacionadas con su módulo y el ángulo que éste forma con uno de los ejes (convencionalmente se elige relacionarlo con el eje x.). Los vectores $\vec{A}$, $\vec{Ax}$ y $\vec{Ay}$ forman un triángulo rectángulo, por lo tanto, aplicando el teorema de Pitágoras puede determinarse el módulo del vector y, con funciones trigonométricas, hallarse el ángulo que forma con el eje x. Conocidas las componentes queda determinado en qué cuadrante está el vector y utilizando la función arcotangente y trabajando con los módulos de las componentes se puede ubicar el ángulo agudo entre el vector y la dirección horizontal.

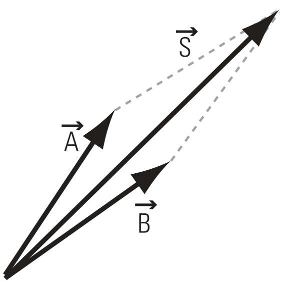
$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^{\ 2} + A_y^{\ 2}} = \sqrt{3^2 + 2^2} = 3,6 \qquad \alpha = arctg\frac{|A_y|}{|A_x|} = arctg\frac{2}{3} = 33,7°$$

Si, inversamente, se conoce el módulo del vector $\vec{A}$ y el ángulo α, se pueden calcular sus componentes como:

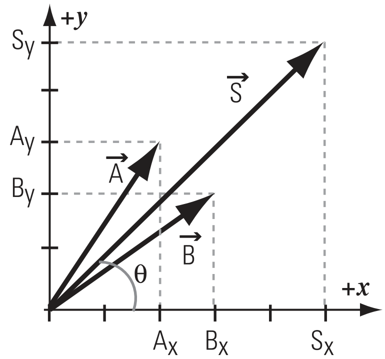
$$A_x = |\vec{A}\ |\cos\alpha = 3,6 \cdot \cos 33,7° = 3 \qquad A_y = |\vec{A}\ |sen\alpha = 3,6 \cdot sen 33,7° = 2$$

Suma analítica de vectores

Consideremos dos vectores cualesquiera con origen en el mismo punto. Si se toma un par de ejes cartesianos ortogonales arbitrarios y se descomponen ambos vectores según estos ejes, cada vector se expresará en función de sus componentes. La componente x del vector suma se calcula, entonces, como la suma de las componentes x de los vectores dados. Un cálculo similar permite calcular la componente y del vector suma. El vector suma quedará de este modo expresado en componentes ortogonales y si se lo necesita, es posible calcular su módulo y su dirección utilizando el teorema de Pitágoras y funciones trigonométricas.



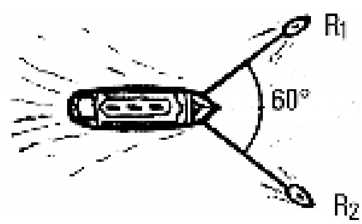
$$\vec{S} = \vec{A} + \vec{B}$$
$$\vec{S} = S_x\breve{x} + S_y\breve{y}$$
donde
$$S_x = A_x + B_x$$
$$S_y = A_y + B_y$$



$$\vec{S} = (2\breve{x} + 3\breve{y}) + (3\breve{x} + 2\breve{y})$$
$$\vec{S} = 5\breve{x} + 5\breve{y}$$
donde
$$S_x = 2 + 3$$
$$S_y = 3 + 2$$
$$|\vec{S}| = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = 7{,}07$$
$$\theta = arctg\frac{S_y}{S_x} = 45°$$

Ejemplo

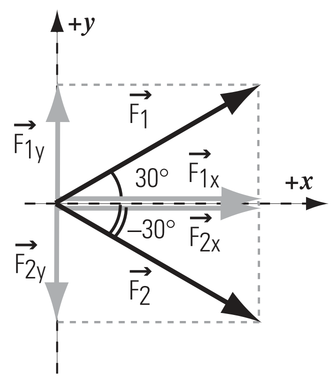
Dos remolques tiran de un barcaza con fuerzas de igual módulo de valor 500 kgf en la forma indicada en la figura. El ángulo entre las fuerzas es 60º. ¿Qué fuerza total ejercen sobre el barco?



Si bien cualquier par de ejes ortogonales permitirá resolver el problema, dada la simetría de la situación conviene tomar el eje x según la bisectriz de ángulo que forman las fuerzas y el eje y perpendicular a éste.

En este sistema de coordenadas las componentes según x de las dos fuerzas son iguales en módulo y sentido. Las componentes en y son también iguales en módulo pero tienen sentidos opuestos con lo cual su suma da cero (se equilibran). Expresado formalmente:

$$\vec{F}_{total} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$
$$F_{total\,x} = F_{1x} + F_{2x} = |\vec{F}_1|\cos 30º + |\vec{F}_2|\cos(-30º) =$$
$$F_{total\,x} = 500kgf.0{,}866 + 500kgf.0{,}866 = 866kgf$$
$$F_{total\,y} = F_{1y} + F_{2_y} = |\vec{F}_1|sen 30º + |\vec{F}_2|sen(-30º) = 250kgf - 250kgf = 0$$
$$\vec{F}_{total} = 866\ kgf\ \breve{x}$$



Si ahora uno de los remolques tirara con una fuerza de 800 kgf, ¿la fuerza total sobre la barcaza estaría en la dirección del eje x? ¿Cuánto valdría?

Dejamos para el alumno la demostración de que en ese caso la fuerza total tiene un módulo de 1135,7 kgf y está en una dirección que forma con el eje x un ángulo de aproximadamente 7,59°, medido en sentido horario.

El procedimiento de sumar analíticamente dos vectores se puede extender de modo sencillo a un número n de vectores:

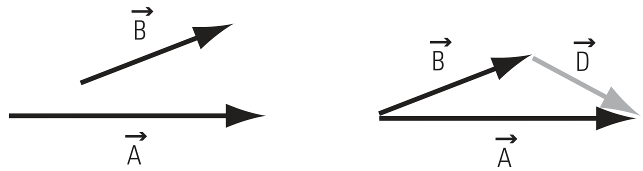
$$\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

$$\vec{S} = S_x\breve{x} + S_y\breve{y} \quad \text{donde} \begin{cases} S_x = \sum_{i=1}^{n} F_x \\ S_y = \sum_{i=1}^{n} F_y \end{cases}$$

Resta o diferencia de vectores

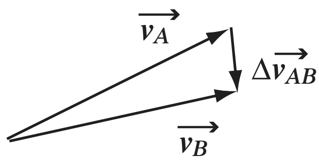
Restarle a un vector $\vec{A}$ otro vector $\vec{B}$ ($\vec{A} - \vec{B}$) es encontrar el vector $\vec{D}$ que hay que sumarle a $\vec{B}$ para obtener $\vec{A}$.

Gráficamente, por aplicación del método de la poligonal, si se llevan los vectores a partir de un mismo origen, el vector resta $\vec{D}$ es el vector que une el extremo de $\vec{B}$ con el de $\vec{A}$.



Para la resta analítica bastará expresar a los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en componentes según un par de ejes y luego restar (en vez de sumar) las componentes según cada eje.

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} \quad \text{porque} \quad \vec{A} = \vec{D} + \vec{B}$$



$$\Delta\vec{v}_{AB} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$
porque
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \Delta\vec{v}_{AB}$$

Para determinar la variación de la velocidad que experimenta un móvil entre dos instantes es necesario restar las velocidades que tiene en esos instantes.

Producto escalar

Hasta aquí hemos considerado la suma y resta de vectores y la multiplicación de un vector por un escalar. Dos clases de producto entre vectores son utilizados comunmente en la Física: el **producto escalar**, que da por resultado un escalar (un número), y el **producto vectorial**, que da por resultado otro vector. Aquí sólo definiremos el producto escalar que denotaremos con un punto grueso: •.

Consideremos dos vectores cualesquiera $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Llamamos producto escalar de $\vec{A}$ por $\vec{B}$, y lo denotamos $\vec{A}\bullet\vec{B}$, al escalar que resulta de multiplicar el módulo de uno de los vectores por la componente del otro vector en la dirección del primero:. En símbolos:

$$\vec{A}\bullet\vec{B} = A_B \cdot \left|\vec{B}\right|$$

Donde A_B es la componente de $\vec{A}$ .en la dirección de $\vec{B}$; el signo del producto escalar es positivo si el vector proyección $\vec{A}_B$ y el vector $\vec{B}$ tienen igual sentido y es negativo si el sentido es contrario. O bien:

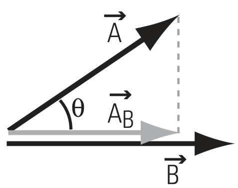
$$\vec{A}\bullet\vec{B} = B_A \cdot \left|\vec{A}\right|$$

con la misma consideración en cuanto al signo

O sea:

$$\vec{A}\bullet\vec{B} = \left|\vec{A}\right| \cdot \cos\theta \cdot \left|\vec{B}\right| \quad ó \quad \vec{A}\bullet\vec{B} = \left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{B}\right| \cdot \cos\theta$$

Donde θ es el ángulo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$



En este caso el producto escalar es positivo porque el vector proyección $\vec{A}_B$ y el vector $\vec{B}$ tienen igual sentido.

Así, por ejemplo, si los vectores son perpendiculares:

$$\theta = 90° \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \vec{A}\bullet\vec{B} = 0$$

Observe que en ese caso la proyección de $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$ es nula.

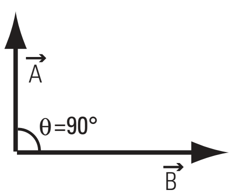
Si los vectores coinciden en dirección y sentido:

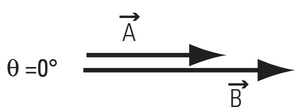
$$\theta = 0° \Rightarrow \cos\theta = 1 \Rightarrow \vec{A}\bullet\vec{B} = \left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{B}\right|$$

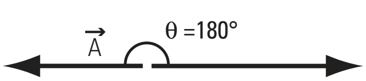
Observe que en ese caso la proyección de $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$ es tiene el mismo módulo que $\vec{A}$.

Si los vectores coinciden en dirección pero tienen sentidos opuestos (son antiparalelos):

$$\theta = 180° \Rightarrow \cos\theta = -1 \Rightarrow \vec{A}\bullet\vec{B} = -\left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{B}\right|$$







El producto escalar tendrá aplicación, en nuestro curso, en el tratamiento del trabajo de una fuerza. El producto vectorial, en cambio, sirve para calcular el momento de una fuerza; es decir, su efecto de torsión.

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DE APLICACIÓN

SERIE 1.1

1. a) –2; b) 8; c) –1; d) 6; e) 5
2. $v_2 = \frac{v_1 v_2}{(2v_1 - v)}$
3. $\frac{\sqrt{2g(h_0 - h)}}{r}$
4. a) 4,2
   b) no hay solución real: el miembro izquierdo es positivo y el de la derecha negativo.
5. a) 0,86603; 0,8660; 0,866; 0,87; 0,9
   b) 0,60182; 0,6018; 0,602; 0,60; 0,6
   c) 0,79864; 0,7986; 0,799; 0,80; 0,8
6. $x_1 = 24,74$; $x_2 = 3,21$; $x_3 = 0,32$
8. $\frac{m^3}{kg.s^2}$

SERIE 1.2

1. $d_{AD} = 3\sqrt{5}$; $d_{CD} = \sqrt{2}$
3. a) y = 2x + 5; b) y = –3x + 6; c) y = x + 5/2
4. a) y = 2/5 x + 1/5; b) y = 4; c) x = –2;
   d) y = –1/2 x +3
5. a) y = –4/7 x + 32/7; b) y = –x + 7
6. a) y = 2x – 9; b) y = –x; c) y = –2x
7. a) L_1: v = –3/2 u + 3; L_2: v = 2
   b) L_3: s=(3/4) t + 2; L_4: t = 4; L_5: s = –t

SERIE 1.5

4. a) y = 4/3 x^2 – 8/3 x –32/3;
   b) s = –2t^2 + 3;
   c) q = p^2/2; d) y = –x^2 + 6x +7
5. b) x = –5; c) $t_1 = 5$; $x_2 = -1$;
   d) $t_v = 2$; $x_v = -9$
6. b) $y_1 = 4$; c) $t_1 = -2$, $t_2 = 4$;
   d) $t_v = 1$, $y_v = 9/2$
7. a) $t_1 = ½ + ½\sqrt{21}$; $y_1 = -3/2 - 3/2\sqrt{21}$;
   $t_2 = ½ - ½\sqrt{21}$; $y_2 = -3/2 + 3/2\sqrt{21}$;
   b) $t_1 = 4 + 2\sqrt{6}$; $y_1 = -12 - 6\sqrt{6}$;
   $t_2 = 4 - 2\sqrt{6}$; $y_2 = -12 + 6\sqrt{6}$
8. a) $t_1 = 2$, $t_2 = -2$; b) $t_1 = 0$, $t_2 = 2$;
   c) $t_1 = 0$, $t_2 = -3$;
   d) no hay t real que cumpla la ecuación.
   e) no hay t real que cumpla la ecuación.
9. $x_1 = -12$; $x_2 = 878$
10. b) P = 31,4, S = 78,5;
    c) 2,62; 3,93; 10,47;
    d) $x_1 = 0$, $y_1 = 5$; $x_2 = -5$, $y_2 = 0$

SERIE 1.6

1.e) $2,5.10^{16}$
1.f) 2.10^{8}
1.h) $1,25.10^{-10}$
1.j) 3.10^{-1}